REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

Prova 835 | Época Especial | Ensino Secundário | 2018

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 13 Páginas

---

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Na resposta a cada um dos itens de escolha múltipla, selecione a única opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente, consoante a situação, todos os elementos relevantes visualizados na sua utilização, como:

- os gráficos obtidos, com os pontos relevantes assinalados (por exemplo, pontos de intersecção de gráficos, pontos de máximos e pontos de mínimos);
- as linhas relevantes da tabela obtida para a resolução;
- as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).

Nos termos da lei em vigor, as provas de avaliação externa são obras protegidas pelo Código do Direito de Autor e dos Direitos Conexos. A sua divulgação não suprime os direitos previstos na lei. Assim, é proibida a utilização destas provas, além do determinado na lei ou do permitido pelo IAVE, I.P., sendo expressamente vedada a sua exploração comercial.

Formulário

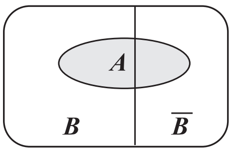
Modelos de grafos

Condição necessária e suficiente para que um grafo conexo admita circuitos de Euler

Um grafo conexo admite circuitos de Euler se e só se todos os seus vértices forem de grau par.

Modelos de probabilidade

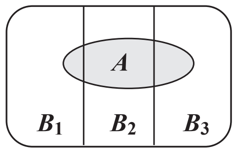
Teorema da probabilidade total e regra de Bayes



$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) =$$
$$= P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B) \times P(A \mid B)}{P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})}$$



$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) =$$
$$= P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)$$

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B_k) \times P(A \mid B_k)}{P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)}$$

podendo k tomar os valores 1, 2 ou 3

Modelo normal

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$$
$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$$
$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$$

Introdução à inferência estatística

Teorema do limite central para a distribuição de amostragem de uma média

Recolhendo uma amostra de dimensão n $(n \geq 30)$ de uma população X com valor médio μ e desvio padrão σ, a distribuição de amostragem da média dessa amostra, $\overline{X}$, pode ser aproximada por uma distribuição normal com valor médio μ e desvio padrão $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Intervalos de confiança

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável normal X, admitindo que se conhece o desvio padrão da variável

$\left]\overline{x} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right[$
n – dimensão da amostra $\overline{x}$ – média amostral σ – desvio padrão da variável z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável X, admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior a 30

$\left]\overline{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}}\right[$
n – dimensão da amostra $\overline{x}$ – média amostral s – desvio padrão amostral z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para uma proporção p, admitindo que a amostra tem dimensão superior a 30

$\left]\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\quad \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right[$
n – dimensão da amostra $\hat{p}$ – proporção amostral z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

(*) Valores de z para os níveis de confiança mais usuais

Nível de confiança	90%	95%	99%
z	1,645	1,960	2,576

1. O município de Fonte Melo festeja os seus 200 anos de existência.

Para comemorar esta data, vai realizar-se uma festa. Foi decidido constituir-se uma comissão de festas integrando elementos das quatro freguesias que compõem este município, A, B, C e D, em função do respetivo número de eleitores.

A Tabela 1 apresenta o número de eleitores inscritos em cada uma das freguesias, num total de 4980 eleitores.

Tabela 1

Freguesia	**A**	**B**	**C**	**D**
N.º de eleitores	3306	514	697	463

Seja N o número de elementos da comissão de festas.

Para converter o número de eleitores de cada freguesia no número de elementos dessa freguesia na comissão de festas, aplicou-se o método a seguir descrito.

1.º passo: Calcula-se o divisor padrão, dividindo-se o número total de eleitores do município por N.

2.º passo: Calcula-se a quota padrão, dividindo-se o número de eleitores de cada freguesia pelo divisor padrão.

3.º passo: Atribui-se a cada freguesia uma quota arredondada igual ao resultado da adição de 1 ao maior número inteiro menor do que a quota padrão.

4.º passo: Se a soma das quotas arredondadas for igual a N, o método dá-se por finalizado e assume-se que o número de elementos de cada freguesia é igual ao valor da quota arredondada. Caso contrário, é necessário encontrar um divisor modificado:

- se a soma das quotas arredondadas for superior a N, adiciona-se um múltiplo de 10 ao divisor padrão;
- se a soma das quotas arredondadas for inferior a N, subtrai-se um múltiplo de 10 ao divisor padrão.

O divisor modificado irá substituir o divisor padrão, de modo a calcular a quota modificada de cada lista.

5.º passo: Repetem-se os três passos anteriores até se obter uma soma das quotas modificadas arredondadas igual a N, atribuindo-se a cada freguesia um número de elementos na comissão de festas igual à respetiva quota modificada arredondada.

1.1. Supondo-se que o divisor padrão é 166, qual será o número total de elementos da comissão de festas (N)?

(A) 20

(B) 25

(C) 30

(D) 35

1.2. Admita que a comissão de festas é formada por 28 elementos.

Apresente a constituição da comissão de festas resultante da aplicação do método descrito.

Na sua resposta, apresente os valores do divisor padrão, das quotas padrão, do divisor modificado e das quotas modificadas, caso seja necessário determiná-los, com arredondamento às décimas.

2. O principal patrocinador da festa de comemoração dos 200 anos do município de Fonte Melo, que comercializa alfaias agrícolas, ofereceu ao município uma enfardadeira (E), um motocultivador (M) e um trator (T).

Para se proceder à distribuição destes bens pelas freguesias A, B e C, utiliza-se o método a seguir descrito.

- Cada presidente de junta de freguesia atribui, secretamente, um valor monetário a cada um dos três bens e coloca o registo dessas licitações dentro de um envelope fechado. Em seguida, os envelopes são abertos e os valores das licitações são registados numa tabela.
- Determina-se o valor global atribuído aos bens por cada presidente de junta e o valor que cada um considera justo receber. Assume-se que o valor que cada presidente de junta considera justo receber é igual a um terço do valor global que ele atribuiu aos três bens.
- Cada bem é destinado à freguesia cujo presidente mais o valoriza, considerando-se que a freguesia recebe o valor monetário que o seu presidente atribuiu ao respetivo bem.
- Caso, por aplicação do procedimento anterior, uma freguesia não receba qualquer bem, considera-se, para efeito dos cálculos seguintes, que o valor dos bens recebidos por essa freguesia é zero euros.
- Caso o valor dos bens recebidos por uma freguesia ultrapasse o valor que o seu presidente tinha considerado justo receber, a freguesia disponibiliza, em dinheiro, o respetivo excedente. Caso contrário, a freguesia recebe, em dinheiro, do montante à disposição, o valor em falta.
- Após os procedimentos anteriores, caso ainda reste dinheiro, este é distribuído em partes iguais pelas três juntas de freguesia.

Na Tabela 2, estão registados os valores, em euros, atribuídos por cada presidente de junta, nas licitações secretas.

Tabela 2

Presidente da Junta de Freguesia \ Bem	E	M	T
A	224	2050	4950
B	182	2000	5003
C	226	1800	6005

De acordo com o método acima descrito, determine como serão distribuídos os bens por cada uma das freguesias e o valor monetário a pagar ou a receber, de forma a que nenhum dos presidentes de junta tenha razão para reclamar.

3. Admita que, no distrito de Castelo Branco, se pretende adotar uma nova tecnologia na iluminação de estradas.

Na Tabela 3, apresenta-se a extensão, em quilómetros, das estradas onde se poderá adotar esta tecnologia.

Tabela 3

	Benquerença (B)	Louriçal do Campo (L)	Oleiros (O)	Torrozelo (T)
Alcafozes (A)	60	51	124	167
Benquerença (B)	----	39	68	173
Louriçal do Campo (L)	----	----	100	144
Oleiros (O)	----	----	----	112

Não sendo viável, por razões económicas, adotar esta tecnologia em todas as estradas, decidiu-se, numa fase inicial, proceder à sua adoção somente em algumas delas.

Para a seleção das estradas recorreu-se ao algoritmo seguinte.

- Constrói-se um grafo, cujos vértices representam as localidades, selecionando-se, sucessivamente, as menores extensões de estradas entre elas, tendo-se em conta que:
  - se a aresta a que corresponde a extensão selecionada levar à formação de um circuito, essa aresta não deve ser considerada;
  - caso contrário, essa aresta deve ser considerada.
- O algoritmo termina quando, no grafo, o número de arestas é igual ao número de vértices menos um.

Determine, nestas condições, o número de quilómetros de estrada que o projeto de iluminação deve contemplar na sua fase inicial.

Na sua resposta, apresente o grafo que resulta da aplicação do algoritmo, indicando o peso de cada aresta.

4. Uma das freguesias do município de Fonte Melo foi criada no início de 2002.

Admita que, t anos após a criação da freguesia, o número de eleitores inscritos é bem aproximado, com arredondamento às unidades, pelo modelo seguinte.

$$E(t) = 7700 - 1471\, ln(t+1) \qquad 0 \leq t < 16$$

4.1. Durante os primeiros 5 anos de existência da freguesia, verificou-se uma redução do número de eleitores.

Determine o valor dessa redução.

4.2. Admita que o número de elementos da assembleia de freguesia (y) depende do número de eleitores inscritos (x), no início do ano em que se realizam as eleições para a sua formação.

Na Tabela 4, apresenta-se o modo como se relacionam esses valores.

Tabela 4

N.º de eleitores **(x)**	**N.º de elementos da assembleia de freguesia** **(y)**
$x \leq 1000$	7
$1000 < x \leq 5000$	9
$5000 < x \leq 20\,000$	13
...	...

Suponha que, nos anos em que se realizam eleições, estas ocorrem no início do ano.

Em que anos teria sido possível realizar eleições de modo a garantir que a assembleia desta freguesia fosse constituída por 13 elementos?

Para responder a esta questão, recorra às capacidades gráficas da sua calculadora e apresente:

– o(s) gráfico(s) visualizado(s) que lhe permite(m) resolver o problema;

– as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às décimas.

5. Para se deslocar à festa do município de Fonte Melo, a família Silva consultou uma empresa de aluguer de automóveis.

Na Tabela 5, apresentam-se as condições de aluguer propostas pela empresa.

Tabela 5

Automóvel	Capacidade (N.º de passageiros)	Consumo (N.º de litros*/ 100 km)	Aluguer por dia (euros)
Tipo 1	4	$4{,}7$	40
Tipo 2	7	$6{,}8$	85

* Admita que o preço do litro de combustível é 1,3 €

A família Silva é composta por cinco pessoas, das quais duas possuem carta de condução.

A família prevê fazer deslocações durante 6 dias e percorrer uma distância total de 1300 km.

Que tipo(s) de automóvel alugou a família, sabendo-se que optou pela proposta mais económica?

Na sua resposta, apresente os custos associados ao aluguer de automóveis do Tipo 1 e do Tipo 2.

6. Na festa de Fonte Melo, teve lugar uma prova de corrida.

6.1. Uma das equipas participantes registou os tempos obtidos pelos seus atletas.

O diagrama de caule-e-folhas seguinte apresenta os 20 registos dos tempos, em minutos, que foram obtidos pelos atletas desta equipa. No caule, consta o valor das dezenas e, nas folhas, o algarismo das unidades de cada registo.

4	6, 8, 8
5	0, 0, 0, 4, 6, 6, 6, 7
6	2, 2, 3, 5, 9
7	4, 4, 4, 9

6.1.1. Qual é a percentagem de atletas com um tempo de prova de, pelo menos, 54 minutos?

(A) 30%

(B) 35%

(C) 65%

(D) 70%

6.1.2. Determine o número de atletas desta equipa cujos tempos pertencem ao intervalo $]\overline{x} - s, \overline{x} + s[$, representando $\overline{x}$ o valor da média e s o valor do desvio padrão dos tempos registados.

Na sua resposta, apresente o valor exato de $\overline{x}$ e o valor de s, com arredondamento às unidades.

6.2. Na corrida participaram 1600 atletas, dos quais 1300 eram do género masculino.

As idades dos atletas participantes na corrida foram organizadas, por género, em dois histogramas de frequências relativas simples.

Na Figura 1, apresenta-se o histograma relativo aos dados dos atletas do género feminino.

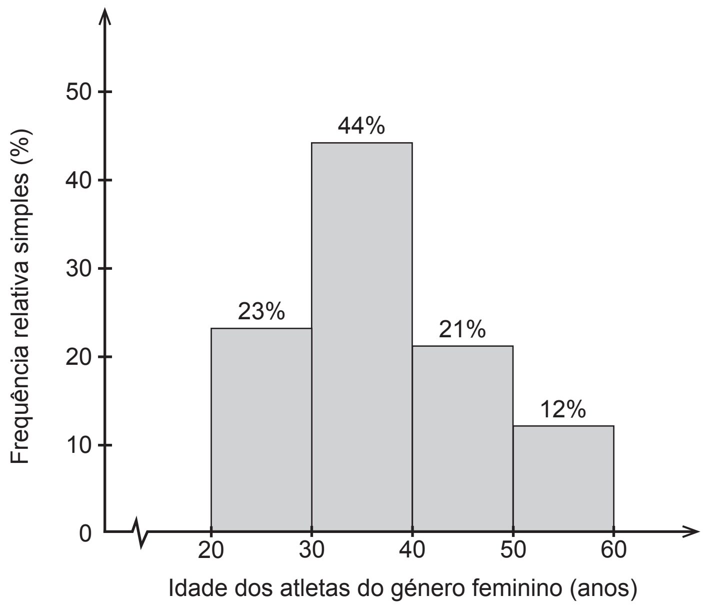


Figura 1

Na Figura 2, apresenta-se o histograma relativo aos dados dos atletas do género masculino, em que não estão registados todos os valores.

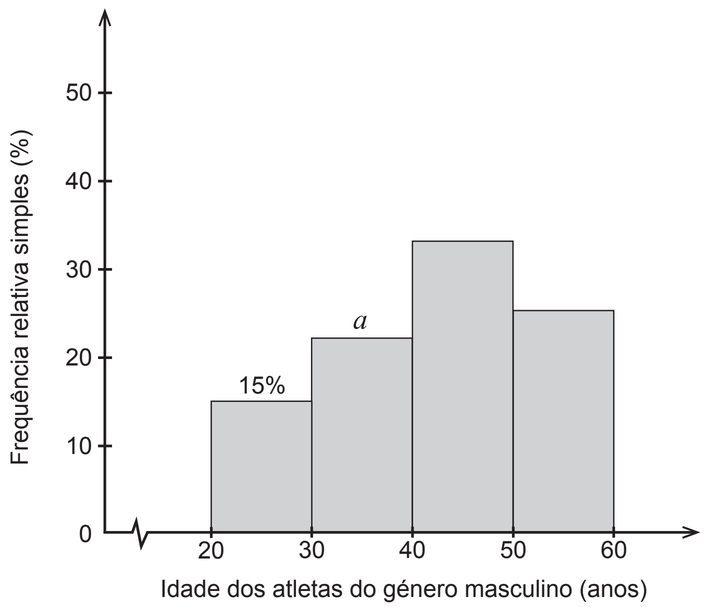


Figura 2

Determine o valor de a, admitindo que na corrida participaram 682 atletas, de ambos os géneros, com idade inferior a 40 anos.

7. Nas suas férias, a família Silva gosta de participar em romarias.

7.1. No verão passado, a família Silva participou em quatro romarias.

Admita que, sempre que a família Silva participa numa romaria, 70% das vezes se faz acompanhar de amigos.

Determine a probabilidade de, nesse verão, a família Silva ter ido sem a companhia de amigos em apenas uma ocasião.

Apresente o resultado em percentagem.

7.2. Em 80% das romarias em que a família Silva participa, existem diversões.

Sabe-se que:

- se existirem diversões, a família Silva regressa cedo a casa em 40% dos casos;
- se não existirem diversões, é tão provável a família Silva regressar cedo a casa como regressar tarde.

Determine a probabilidade de a família Silva ir a uma romaria com diversões, sabendo que regressa tarde a casa.

Apresente o resultado, na forma de dízima, arredondado às centésimas.

8. Em reunião camarária, foram programados alguns estudos estatísticos a realizar no decurso da festa de comemoração dos 200 anos do município de Fonte Melo. Para recolher dados, foram inquiridas 324 pessoas presentes na festa.

8.1. Para estudar o grau de satisfação dos presentes, a equipa responsável pelo estudo construiu um intervalo de confiança a 99% para a percentagem de pessoas satisfeitas.

Das pessoas inquiridas, 235 mostraram-se satisfeitas com o decorrer das festividades.

A equipa decidiu que a festa seria considerada um êxito se, pelo menos, 75% da totalidade dos presentes se considerassem satisfeitos.

Com base no inquérito e no intervalo de confiança construído, pode a equipa afirmar que a festa não foi um êxito?

Na sua resposta:

– apresente o valor da proporção arredondado às centésimas;

– caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, exatamente, quatro casas decimais;

– apresente os valores dos extremos do intervalo em percentagem, arredondados às unidades.

8.2. Outro aspeto estudado foi o do número de quilómetros percorridos pelas pessoas presentes na festa, desde as suas casas até ao local onde a festa teve lugar.

Em média, os 324 inquiridos percorreram 56 km.

Com base neste valor construiu-se um intervalo de confiança a 95% para o valor médio, em quilómetros, das distâncias percorridas pelas pessoas presentes na festa, tendo-se obtido o seguinte intervalo: $]55, 57[$.

Nestas condições, o desvio padrão populacional é, com aproximação às centésimas, igual a

(A) $0{,}11$

(B) $4{,}69$

(C) $9{,}18$

(D) $18{,}37$

FIM

COTAÇÕES

Item Cotação (em pontos)														TOTAL
1.1.	**1.2.**	**2.**	**3.**	**4.1.**	**4.2.**	**5.**	**6.1.1.**	**6.1.2.**	**6.2.**	**7.1.**	**7.2.**	**8.1.**	**8.2.**	
8	16	16	16	16	16	16	8	16	16	16	16	16	8	**200**