REPÚBLICA PORTUGUESA

EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

Prova 835 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2018

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Braille

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 12 Páginas

---

É permitido o uso de calculadora.

Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o item.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário no final do enunciado da prova.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Na resposta a cada um dos itens de escolha múltipla, selecione a única opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

---

1. Na escola de Serrado de Cima, todos os anos é organizada uma visita de estudo a um país estrangeiro.

No último ano, apresentou-se aos alunos três países de destino possíveis: B, C e D.

No boletim de voto, cada aluno colocou os três países por ordem decrescente de preferência.

A Tabela 1 apresenta as quatro listas ordenadas de preferências estabelecidas pelos alunos e o respetivo número de votos; o número de votos obtido por uma das listas ordenadas é indicado por X.

Tabela 1

	Votos			
	X	15	12	7
1.ª P	B	C	D	B
2.ª P	D	D	C	C
3.ª P	C	B	B	D

1.1. Admita que a escolha do país a visitar será feita considerando apenas a primeira preferência indicada pelos alunos. Nestas condições, o segundo país mais votado para a visita de estudo seria B.

Assim, um valor possível de X é

a) 4

b) 7

c) 10

d) 11

1.2. Considere agora que $X = 9$.

Foi decidido que a escolha do país a visitar resultaria da aplicação do método a seguir descrito.

- Efetua-se a contagem do número de votos em cada país, como primeira preferência, e verifica-se se algum deles obtém a maioria absoluta. Caso isso se verifique, esse país é o vencedor.
- Caso contrário, o país que obteve o menor número de votos, como primeira preferência, é eliminado da tabela. A tabela de preferências é, em seguida, reestruturada, e, em cada coluna, os países que ocupavam os lugares abaixo do país eliminado sobem uma linha, mantendo-se pela mesma ordem.
- Os procedimentos anteriores são aplicados à nova tabela de preferências obtida no ponto anterior.
- O processo repete-se até que um dos países obtenha a maioria absoluta na primeira preferência.

Determine, por aplicação do método descrito, qual o país escolhido pelos alunos como destino para a sua visita de estudo.

Na sua resposta, apresente todos os cálculos efetuados.

2. Os guias Mary e Paul que acompanharam os alunos na visita de estudo receberam do grupo de alunos três presentes: um CD de fado (C), uma embalagem de doces regionais (D) e uma bandeira de Portugal (P).

Como não chegaram a acordo sobre a divisão dos três presentes, os guias resolveram aplicar o método a seguir descrito.

- Cada um dos guias atribui, secretamente, um certo número de pontos a cada um dos presentes, num total de 100 pontos.
- Cada presente é destinado, temporariamente, ao guia que mais o valoriza.
- Determina-se o total de pontos do(s) presente(s) temporariamente destinado(s) a cada um dos guias. Seja A o guia com o total de pontos mais elevado e B o outro guia.
- Procede-se ao ajuste da partilha, de modo a que os dois guias fiquem com número igual no total de pontos. O presente que tiver menor diferença de pontos atribuídos será utilizado para se proceder ao ajuste, sendo esse o presente a partilhar pelos guias.
- Representa-se o total final de pontos a atribuir ao guia A pela diferença entre o total temporário dos seus pontos e x por cento dos pontos por ele atribuído ao presente a partilhar.
- Representa-se o total final de pontos a atribuir ao guia B pela soma do total temporário dos seus pontos com x por cento dos pontos por ele atribuído ao presente a partilhar.
- Igualam-se os dois totais finais, de modo a determinar o valor de x com o qual a partilha ficará equilibrada.
- O guia B fica com o(s) presente(s) a si destinado(s) temporariamente e x por cento do presente a partilhar e o guia A fica com o restante.

Na Tabela 2, apresenta-se o número de pontos atribuído aos três presentes por cada um dos guias.

Tabela 2

	Mary	Paul
C	33	56
D	20	24
P	47	20

Proceda à partilha dos presentes, aplicando o método acima descrito.

Na sua resposta:

– apresente a partilha temporária dos presentes pelos guias;

– determine o total de pontos dos presentes temporariamente destinados a cada guia;

– selecione o presente a utilizar no ajuste da partilha;

– apresente a equação que traduz o equilíbrio da partilha e resolva-a;

– apresente a partilha final dos presentes.

3. Mariana decidiu viajar até à capital do país B e, a partir daí, visitar as capitais de outros países, não regressando à primeira capital no final da visita.

Os países cujas capitais pretende visitar, além de B, são A, C, D e E.

Para planear as suas férias, Mariana utilizou a Tabela 3, que apresenta as distâncias, em quilómetros, entre as capitais dos referidos países.

Tabela 3

	B	C	D	E
A	677	349	572	640
B	-----	328	673	80
C	-----	----	681	305
D	-----	----	----	689

Para definir o seu percurso, Mariana optou por utilizar o método seguinte:

- escolher a menor distância entre capitais de países, qualquer que ela seja;
- escolher, sucessivamente, as menores distâncias, garantindo que, anteriormente, ambas as capitais não tenham sido selecionadas, até que todas as capitais sejam selecionadas.

Apresente um percurso possível, definido por Mariana, com início na capital do país B.

Na sua resposta, apresente:

– a ordenação das distâncias selecionadas pelo método descrito;

– um percurso que Mariana poderá ter definido.

4. A altitude de um pequeno avião foi monitorizada, pela torre de controlo do aeródromo da ilha de Dujal, pouco tempo depois de levantar voo.

Admita que a altitude do avião, em milhares de metros, t minutos após o início da monitorização, é dada por

$$A(t) = \frac{9}{1+17e^{-0,7t}} \quad \text{para } t \in [0, 15]$$

4.1. Suponha que o modelo que dá, em cada momento, a altitude do avião tem uma margem de erro de 10 metros.

Determine entre que valores pode variar a altitude efetiva deste avião, 90 segundos após o início da monitorização.

Apresente a resposta, em metros, com arredondamento às unidades.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, exatamente, três casas decimais.

4.2. Determine, de acordo com o modelo apresentado, durante quantos minutos o avião voou a uma altitude inferior a 6 milhares de metros.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, exatamente, duas casas decimais.

4.3. O avião não atingiu a altitude prevista no plano de voo inicialmente estabelecido. Nesse plano de voo, o avião deveria atingir a altitude máxima de 12 000 metros.

Selecione a opção que completa corretamente a frase.

Ao fim dos 15 minutos de voo monitorizado, a altitude atingida pelo avião foi, com aproximação às unidades, ______________ da altitude máxima estabelecida no plano de voo.

a) 22%

b) 44%

c) 67%

d) 75%

5. Sempre que viaja, Mariana leva a cabo, com alguma antecedência, o planeamento financeiro necessário para suportar os custos da viagem. No início de 2010, Mariana consultou o seu gestor de conta para decidir a melhor maneira de investir um capital de 2800 euros que pretendia vir a utilizar no início de 2016.

O seu gestor de conta apresentou-lhe duas alternativas, de acordo com as quais o capital investido não poderia ser movimentado até ao início de 2016.

Alternativa 1:

Constituir um depósito bancário, na modalidade de juro composto, com uma taxa de juro anual de 4%, com juros pagos semestralmente.

Nesta modalidade de investimento, o valor do capital final ao fim de n anos é dado pela expressão

$$C_n = C \times \left(1 + \frac{i}{k}\right)^{k\,n}$$

C – capital investido
i – taxa de juro anual
k – número de capitalizações por ano
n – número de anos

Alternativa 2:

Adquirir unidades de participação (UP) de um fundo de investimento.

Nesta modalidade de investimento, por exemplo, se uma UP tiver um valor de 12 euros, com 120 euros podem comprar-se 10 UP.

As UP adquiridas podem, posteriormente, ser vendidas pelo seu valor no momento da venda.

Mariana optou pela Alternativa 1.

No início de 2016, quando foi ao banco levantar o seu dinheiro, consultou, por curiosidade, a Tabela 4, na qual se apresenta a evolução do valor de cada uma das UP mencionadas na Alternativa 2.

Tabela 4

Ano	Valor de cada UP
2010	14
2012	37
2014	22
2016	17

Terá Mariana optado pela alternativa mais rentável?

Na sua resposta, apresente:

– o valor do capital final que Mariana obteve com o depósito bancário, com arredondamento às unidades;

– o valor do capital final que Mariana teria obtido se tivesse adquirido UP.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, exatamente, quatro casas decimais.

6. Na ilha de Dujal existe uma espécie de larvas que se encontram em algumas árvores. Uma equipa de biólogos estudou a evolução da massa das larvas, em gramas, em função do tempo de vida, em semanas.

6.1. Na Tabela 5, apresenta-se a informação relativa à massa das larvas no percentil 15 (P15), no percentil 50 (P50) e no percentil 85 (P85).

Tabela 5

	Tempo de vida (semanas)		
	8	10	12
P15	11 g	14 g	17 g
P50	16 g	19 g	23 g
P85	22 g	27 g	31 g

Por exemplo, uma larva com 12 semanas de vida e 31 gramas de massa encontra-se no percentil 85 (P85). Ou seja, considerando-se larvas com 12 semanas de vida, 85 em cada 100 terão uma massa máxima de 31 gramas.

Numa amostra com 500 larvas, com 10 semanas de vida, quantas são de esperar encontrar com massa compreendida entre 14 e 27 gramas?

6.2. Numa das semanas em que foram realizadas pesagens de larvas, os biólogos construíram uma tabela onde anotaram a informação recolhida. A tabela por eles criada foi danificada, sendo possível recuperar apenas uma parte da informação nela contida.

Na Tabela 6, apresenta-se a informação recuperada.

Tabela 6

Massa (g)	n_i	Fr_i
$[0, 5[$	3	0,015
$[5, 10[$	15	a
$\ldots$		
$[20, 25[$		0,9
$[25, 30[$	b	
$[30, 35[$	5	1

n_i – Frequência absoluta simples

Fr_i – Frequência relativa acumulada

Determine os valores de a e de b.

7. Numa das suas viagens, Mariana visitou um país tropical, integrada num grupo de viajantes.

7.1. Do grupo de 60 viajantes, sabe-se que $\frac{1}{5}$ eram homens.

Escolhendo-se, ao acaso, dois viajantes do grupo, determine a probabilidade de ambos serem mulheres.

Apresente o resultado na forma de dízima, com arredondamento às centésimas.

7.2. Depois da viagem, Mariana decidiu fazer um exame médico, para averiguar se tinha sido contaminada por uma doença que afeta 5% das pessoas que visitam esse país tropical.

Relativamente ao exame médico que Mariana realizou, sabe-se que:

- 90% das pessoas contaminadas têm um resultado positivo;
- 5% das pessoas não contaminadas têm um resultado positivo (falso positivo).

Determine a probabilidade de Mariana estar contaminada pela doença, sabendo-se que o resultado do teste não foi positivo.

Apresente a resposta na forma de dízima, com arredondamento às milésimas.

8. Mariana trabalhou numa agência de viagens, na qual analisava os gastos mensais dos clientes.

8.1. Num estudo realizado em abril de 2017, Mariana constituiu uma amostra de 100 clientes, de modo a estudar quantos tinham gasto mais de 1000 euros. Verificou que isso sucedeu com 58 clientes.

Com base na informação recolhida, construa um intervalo de confiança a 95%, para a proporção dos clientes da agência que gastaram, nesse mês, mais de 1000 euros.

Apresente os extremos do intervalo de confiança, com arredondamento às centésimas.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, exatamente, três casas decimais.

8.2. Em maio de 2017, Mariana analisou os gastos em viagens dos clientes da agência e verificou que, nesse mês, os clientes gastaram, em média, 1200 euros, com um desvio padrão de a euros.

Nessas condições, para uma amostra de dimensão 100, o desvio padrão da distribuição de amostragem da média é bem aproximado pelo valor 8.

Assim, o valor de a é:

a) $0{,}8$

b) 8

c) 80

d) 800

FIM

COTAÇÕES

1.
   1.1. ....8 pontos
   1.2. .... 16 pontos

24 pontos

2. .... 16 pontos

3. .... 16 pontos

4.
   4.1. .... 16 pontos
   4.2. .... 16 pontos
   4.3. ....8 pontos

40 pontos

5. .... 16 pontos

6.
   6.1. .... 16 pontos
   6.2. .... 16 pontos

32 pontos

7.
   7.1. .... 16 pontos
   7.2. .... 16 pontos

32 pontos

8.
   8.1. .... 16 pontos
   8.2. ....8 pontos

24 pontos

TOTAL .... 200 pontos

Formulário

Teoria matemática das eleições

Conversão de votos em mandatos, utilizando o método de representação proporcional de Hondt

O número de votos apurados por cada lista é dividido, sucessivamente, por 1, 2, 3, 4, 5, etc., sendo os quocientes alinhados, pela ordem decrescente da sua grandeza, numa série de tantos termos quantos os mandatos atribuídos ao círculo eleitoral em causa; os mandatos pertencem às listas a que correspondem os termos da série estabelecida pela regra anterior, recebendo cada uma das listas tantos mandatos quantos os seus termos na série; no caso de só ficar um mandato por distribuir e de os termos seguintes da série serem iguais e de listas diferentes, o mandato cabe à lista que tiver obtido o menor número de votos.

Modelos de grafos

Condição necessária e suficiente para que um grafo conexo admita circuitos de Euler

Um grafo conexo admite circuitos de Euler se e só se todos os seus vértices forem de grau par.

Probabilidades

Teorema da probabilidade total e regra de Bayes

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) = P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B) \times P(A \mid B)}{P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})}$$

$$P(A) = P\left(A \cap B_1\right) + P\left(A \cap B_2\right) + P\left(A \cap B_3\right) =$$
$$= P\left(B_1\right) \times P\left(A \mid B_1\right) + P\left(B_2\right) \times P\left(A \mid B_2\right) + P\left(B_3\right) \times P\left(A \mid B_3\right)$$

$$P\left(B_k \mid A\right) = \frac{P\left(A \cap B_k\right)}{P(A)} = \frac{P\left(B_k\right) \times P\left(A \mid B_k\right)}{P\left(B_1\right) \times P\left(A \mid B_1\right) + P\left(B_2\right) \times P\left(A \mid B_2\right) + P\left(B_3\right) \times P\left(A \mid B_3\right)}$$

podendo k tomar os valores $1, 2$ ou 3

Introdução à inferência estatística

Teorema do limite central para a distribuição de amostragem de uma média

Recolhendo uma amostra de dimensão $n \ (n \geq 30)$ de uma população X com valor médio μ e desvio padrão σ, a distribuição de amostragem da média dessa amostra, $\overline{X}$, pode ser aproximada por uma distribuição normal com valor médio μ e desvio padrão $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Distribuição normal

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Intervalos de confiança

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável normal X, admitindo que se conhece o desvio padrão da variável

$$\left]\overline{x} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\overline{x}$ – média amostral

σ – desvio padrão da variável

z – valor relacionado com o nível de confiança (*****)

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável X, admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior a 30

$\left]\overline{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}}\right[$
n – dimensão da amostra $\overline{x}$ – média amostral s – desvio padrão amostral z – valor relacionado com o nível de confiança (*****)

Intervalo de confiança para uma proporção p, admitindo que a amostra tem dimensão superior a 30

$\left]p - z\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}},\quad p + z\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right[$
n – dimensão da amostra p – proporção amostral z – valor relacionado com o nível de confiança (*****)

(*****) Valores de z para os níveis de confiança mais usuais

Nível de confiança	z
90%	1,645
95%	1,960
99%	2,576