

Exame Final Nacional de Matemática A
Prova 635 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2018

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Entrelinha 1,5, sem figuras

Caderno 1

Duração da Prova (Caderno 1 + Caderno 2): 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 10 Páginas

Caderno 1: 75 minutos. Tolerância: 15 minutos.
É permitido o uso de calculadora.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro e transferidor.

Só é permitido o uso de calculadora no Caderno 1.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens de cada caderno encontram-se no final do respetivo caderno.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Complexos

$$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta) \quad \text{ou} \quad (\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$$

$$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \quad \text{ou} \quad \sqrt[n]{\rho} e^{i\theta} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}} \quad (k \in \{0, \dots, n-1\} \text{ e } n \in \mathbb{N})$$

Probabilidades

$$\mu = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$$

$$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \dots + p_n (x_n - \mu)^2}$$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$$

Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u v)' = u' v + u v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' v - u v'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n u^{n-1} u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$$

$$(\operatorname{cos} u)' = -u' \operatorname{sen} u$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\operatorname{cos}^2 u}$$

$$(e^u)' = u' e^u$$

$$(a^u)' = u' a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

Limites notáveis

$$\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$

1.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O **item 1.1.** integra-se nos Programas de Matemática A, de 10.º, 11.º e 12.º anos, homologados em 2001 e 2002 (**P2001/2002**).

O **item 1.2.** integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, homologado em 2015 (**PMC2015**).

Responda apenas a um dos dois itens.

Na sua folha de respostas, identifique claramente o item selecionado.

P2001/2002

1.1. Seja X uma variável aleatória com distribuição normal de valor médio μ e desvio padrão σ

Qual é o valor, arredondado às milésimas, de $P(X > \mu - 2\sigma)$?

(A) 0,926

(B) 0,982

(C) 0,977

(D) 0,943

1.2. Seja $[ABC]$ um triângulo tal que:

- a amplitude do ângulo com vértice em A é 57°
- a amplitude do ângulo com vértice em B é 81°
- o comprimento do lado oposto ao ângulo com vértice em B é 5

Qual é o comprimento, arredondado às centésimas, do lado oposto ao ângulo com vértice em C ?

(A) 3,31

(B) 3,35

(C) 3,39

(D) 3,43

2. Num clube desportivo, praticam-se as modalidades de basquetebol e futebol, entre outras.

Sabe-se que, escolhido ao acaso um atleta deste clube, a probabilidade de ele praticar basquetebol

é $\frac{1}{5}$ e a probabilidade de ele praticar futebol é $\frac{2}{5}$

Sabe-se ainda que, dos atletas que não praticam futebol, 3 em cada 4 não praticam basquetebol.

Mostre que existe, pelo menos, um atleta do clube que pratica as duas modalidades desportivas.

3. Dispõe-se de catorze caracteres (a saber: os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e as vogais a, e, i, o, u) para formar códigos de quatro caracteres.

3.1. Quantos códigos iniciados por uma vogal seguida de três algarismos diferentes se podem formar?

(A) 420

(B) 504

(C) 1840

(D) 2520

3.2. Escolhe-se, ao acaso, um código de entre todos os códigos de quatro caracteres, repetidos ou não, que é possível formar com os catorze caracteres.

Determine a probabilidade de esse código ser constituído por quatro algarismos diferentes cujo produto seja um número ímpar.

Apresente o resultado arredondado às milésimas.

4. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a superfície esférica de equação

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 10$$

4.1. Seja P o ponto da superfície esférica de abcissa 1, ordenada 3 e cota negativa.

Seja r a reta de equação vetorial $(x, y, z) = (-1, 0, 3) + k(4, 1, -2)$, $k \in \mathbb{R}$

Determine uma equação do plano que passa no ponto P e é perpendicular à reta r

Apresente essa equação na forma $ax + by + cz + d = 0$

4.2. Seja C o centro da superfície esférica e seja A o simétrico do ponto C relativamente ao plano xOy

Determine a amplitude do ângulo AOC

Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

5. O planeta Mercúrio descreve uma órbita elíptica em torno do Sol.

Designemos por M o centro do planeta Mercúrio, por S o centro do Sol e por A um ponto fixo da órbita de Mercúrio.

Para cada posição do planeta Mercúrio, seja x a amplitude, em graus, do ângulo ASM ($0^\circ \leq x \leq 180^\circ$)

Admita que a distância, d , em milhões de quilómetros, do planeta Mercúrio ao Sol é dada, em função de x , por

$$d = \frac{555}{10 - 2,06 \cos x}$$

Seja α a amplitude do ângulo ASM , num certo instante (α está compreendido entre 0 e 20 graus). Nesse instante, o planeta Mercúrio encontra-se a uma certa distância do Sol.

Passado algum tempo, a amplitude do ângulo ASM é três vezes maior e a distância do planeta Mercúrio ao Sol diminuiu 3%.

Escreva uma equação que lhe permita determinar o valor de α

Não resolva a equação.

6. A primeira derivada de uma função f , de domínio $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, é dada por $f'(x) = 3x - \operatorname{tg} x$

Sabe-se que o gráfico de f tem um único ponto de inflexão.

Qual é a abcissa desse ponto, arredondada às centésimas?

(A) 0,84

(B) 0,88

(C) 0,92

(D) 0,96

7. De uma progressão aritmética (u_n) sabe-se que o terceiro termo é igual a 4 e que a soma dos doze primeiros termos é igual a 174

Averigue se 5371 é termo da sucessão (u_n)

8. Considere, no plano complexo, um pentágono regular $[ABCDE]$ inscrito numa circunferência de centro na origem e raio 1

Sabe-se que o vértice C pertence ao semieixo real negativo.

Seja z o número complexo cujo afixo (imagem geométrica) é o vértice do pentágono pertencente ao primeiro quadrante.

Qual é o valor de z^5 ?

(A) -1

(B) 1

(C) i

(D) $-i$

FIM DO CADERNO 1

COTAÇÕES (Caderno 1)

1.
 - 1.1. ou 1.2. 8 pontos
2. 12 pontos
3.
 - 3.1. 8 pontos
 - 3.2. 12 pontos
4.
 - 4.1. 12 pontos
 - 4.2. 13 pontos
5. 12 pontos
6. 8 pontos
7. 12 pontos
8. 8 pontos

105 pontos