REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2018

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Entrelinha 1,5, sem figuras

Caderno 2
8 Páginas

Duração da Prova (Caderno 1 + Caderno 2): 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

Caderno 2: 75 minutos. Tolerância: 15 minutos.

Não é permitido o uso de calculadora.

8.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O **item 8.1.** integra-se nos Programas de Matemática A, de 10.º, 11.º e 12.º anos, homologados em 2001 e 2002 (**P2001/2002**).

O **item 8.2.** integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, homologado em 2015 (**PMC2015**).

Responda apenas a um dos dois itens.

Na sua folha de respostas, identifique claramente o item selecionado.

P2001/2002

8.1. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a reta r definida pela condição

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-1} \ \wedge\ z=3$$

Qual das seguintes equações vetoriais define a reta r ?

(A) $(x,y,z)=(3,0,3)+k\,(2,-1,0)\ ,\quad k\in\mathbb{R}$

(B) $(x,y,z)=(3,0,3)+k\,(2,-1,3)\ ,\quad k\in\mathbb{R}$

(C) $(x,y,z)=(-1,2,0)+k\,(2,-1,3)\ ,\quad k\in\mathbb{R}$

(D) $(x,y,z)=(-1,2,0)+k\,(2,-1,0)\ ,\quad k\in\mathbb{R}$

PMC2015

8.2. Qual é o valor de $\operatorname{arcsen}(1)+\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$?

(A) $\frac{7\pi}{6}$

(B) $\frac{\pi}{6}$

(C) $\frac{3\pi}{4}$

(D) $\frac{\pi}{4}$

9. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $w=1+\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{3}\,i^5}{1+2i}$

Sabe-se que w é uma raiz quarta de um certo complexo z

Determine a raiz quarta de z cujo afixo (imagem geométrica) pertence ao primeiro quadrante.

Apresente o resultado na forma trigonométrica, com argumento pertencente ao intervalo $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

10.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O **item 10.1.** integra-se nos Programas de Matemática A, de 10.º, 11.º e 12.º anos, homologados em 2001 e 2002 (**P2001/2002**).

O **item 10.2.** integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, homologado em 2015 (**PMC2015**).

Responda apenas a um dos dois itens.

Na sua folha de respostas, identifique claramente o item selecionado.

P2001/2002

10.1. Num saco, encontram-se quatro bolas indistinguíveis ao tato, numeradas de 0 a 3

Retiram-se, ao acaso, sucessivamente e sem reposição, duas bolas do saco.

Seja X a variável aleatória «produto dos números saídos».

Para um certo valor de k, tem-se que $P(X=k)=\frac{1}{2}$

Qual é o valor de k ?

(A) 6

(B) 2

(C) 3

(D) 0

PMC2015

10.2. Seja k um número real.

Considere a sucessão convergente (u_n) definida por $u_n = \left(\frac{n+k}{n}\right)^n$

Sabe-se que o limite de (u_n) é solução da equação $\ln\left(\frac{x}{e}\right) = 3$

Qual é o valor de k ?

(A) $\frac{1}{4}$

(B) 3

(C) $\frac{1}{3}$

(D) 4

11. Sejam a e b números reais superiores a 1 tais que $\ln b = 4 \ln a$

Determine o conjunto dos números reais que são soluções da inequação $a^x \geq b^{\frac{1}{x}}$

Apresente a resposta usando a notação de intervalos de números reais.

12. Seja g a função, de domínio $]-\infty,\pi]$, definida por

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{2x}-1}{4x} & \text{se } x<0\\[2mm] \dfrac{1}{2-\operatorname{sen}(2x)} & \text{se } 0\le x\le\pi\end{cases}$$

12.1. Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) A função g não tem zeros.

(B) A função g tem um único zero.

(C) A função g tem exatamente dois zeros.

(D) A função g tem exatamente três zeros.

12.2. Averigue se a função g é contínua no ponto 0

Justifique a sua resposta.

12.3. Estude a função g quanto à monotonia no intervalo $]0,\pi]$ e determine, caso existam, os extremos relativos.

13. Considere a função f definida em $]0,\pi[$ por $f(x)=\dfrac{x}{\operatorname{sen} x}$

Qual das equações seguintes define uma assíntota do gráfico da função f ?

(A) $x=0$

(B) $x=\pi$

(C) $x=1$

(D) $x=\dfrac{\pi}{2}$

14. Considere, num referencial o.n. xOy, o gráfico da função h, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por

$$h(x)=\frac{\ln x}{x}$$

Para cada número real a pertencente ao intervalo $\left]\frac{1}{2},1\right[$, sejam P e Q os pontos do gráfico da função h de abcissas a e $2a$, respetivamente.

A reta PQ, que tem declive positivo, define, com os eixos coordenados, um triângulo retângulo em O.
Mostre que existe, pelo menos, um número real a pertencente ao intervalo $\left]\frac{1}{2},1\right[$ para o qual esse triângulo é isósceles.

Sugestão: comece por identificar o valor do declive da reta PQ para o qual o triângulo é isósceles.

FIM

COTAÇÕES (Caderno 2)

8.	
8.1. ou **8.2.**	8 pontos
9.	12 pontos
10.	
10.1. ou **10.2.**	8 pontos
11.	13 pontos
12.	
12.1.	8 pontos
12.2.	13 pontos
12.3.	13 pontos
13.	8 pontos
14.	12 pontos
	95 pontos

TOTAL (Caderno 1 + Caderno 2) .... **200 pontos**