

## Exame Final Nacional de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

### Prova 835 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2020

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho

#### Entrelinha 1,5, sem figuras

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

17 Páginas

A prova inclui 3 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final (itens **1.**, **2.** e **7.1.**). Dos restantes 11 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de calculadora.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário no final do enunciado da prova.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Item obrigatório

1. A Maria e os amigos estavam a planear o itinerário do *Interrail* que tencionavam fazer nas férias.

Para seleccionar a cidade que visitariam a seguir a Roma, consultaram diversos blogues de viagens. Num deles, o autor apresentava as listas de preferências de 23 pessoas que tinham visitado quatro cidades de Itália: Florença (F), Milão (M), Nápoles (N) e Veneza (V).

Com estas listas, construíram a tabela seguinte, na qual a lista de preferências de cada uma das 23 pessoas equivale a um voto.

Tabela 1

Preferências	Votos			
	8	7	5	3
1. <sup>a</sup>	V	F	M	N
2. <sup>a</sup>	F	M	N	V
3. <sup>a</sup>	N	V	F	M
4. <sup>a</sup>	M	N	V	F

A seleção da cidade resultou da aplicação do método a seguir descrito.

- Efetua-se a contagem do número de votos em cada cidade, como primeira preferência, e verifica-se se alguma delas obtém a maioria absoluta. Caso isso se verifique, essa cidade é a vencedora.
- Caso contrário, elimina-se a cidade menos votada como primeira preferência. Em seguida, a tabela de preferências é reestruturada, e, em cada coluna, as cidades que ocupavam os lugares abaixo da cidade eliminada sobem uma linha, mantendo-se pela mesma ordem.
- Os procedimentos anteriores são aplicados à nova tabela de preferências obtida no ponto anterior.
- O processo repete-se até que uma das cidades obtenha a maioria absoluta na primeira preferência.

Indique a cidade que a Maria e os amigos planeiam visitar a seguir a Roma.

Na sua resposta, aplique o método anteriormente descrito, apresentando todos os cálculos efetuados.

## Item obrigatório

2. A Maria, o Carlos, a Elsa, o Pedro e a Sara pretendem visitar França durante o seu *Interrail*. Para prepararem a viagem, decidem pesquisar sobre o país. Como todos querem dar o seu contributo na pesquisa e têm pouco tempo para a realizar, decidem dividir o mapa do país em cinco parcelas, ficando cada um responsável pela recolha de informação sobre uma das parcelas.

Os cinco amigos acordaram entre si que o algoritmo a seguir descrito proporcionaria uma divisão justa do mapa do país.

1.º passo: Atribui-se, aleatoriamente, uma ordem aos amigos. Considere-se que a ordem atribuída foi A, B, C, D e E.

2.º passo: O amigo A delimita uma parcela do mapa que considera corresponder a  $\frac{1}{5}$  do total, visto serem cinco os intervenientes iniciais, e entrega a parcela em causa ao amigo B.

3.º passo: O amigo B pronuncia-se, concordando com a divisão efetuada ou dela discordando:

- se considera que a parcela que lhe foi entregue é  $\frac{1}{5}$  do mapa (ou menos), passa a vez ao amigo seguinte, entregando-lhe a parcela em causa;
- se considera que a parcela que lhe foi entregue é mais do que  $\frac{1}{5}$  do mapa, retifica-a (retirando-lhe uma parte) e passa a vez ao amigo seguinte, entregando-lhe a parcela em causa.

4.º passo: O amigo C repete o procedimento do 3.º passo e entrega a parcela em causa ao amigo D.

5.º passo: O amigo D repete o procedimento do 3.º passo e entrega a parcela em causa ao amigo E.

6.º passo: O amigo E pronuncia-se:

- se concorda com a divisão efetuada, atribui a parcela resultante de todo este processo ao último amigo que tenha retificado a parcela, ou, se ninguém a tiver retificado, entrega-a ao amigo A;
- se discorda da divisão efetuada, retifica a parcela, e esta é-lhe entregue.

Termina assim a primeira volta, saindo o amigo que acabou de receber a parcela.

7.º passo: A segunda volta faz-se com o que resta do mapa e inicia-se no amigo a seguir ao que acabou de receber a parcela na volta anterior, mantendo-se a ordem entre os restantes amigos.

8.º passo: Realizam-se as voltas necessárias, sempre com um amigo a menos do que na volta anterior, até que restem apenas dois amigos. Quando isso acontecer, um divide e o outro escolhe. Termina, assim, a divisão do mapa pelos cinco amigos.

Para a divisão do mapa, a ordem atribuída aleatoriamente foi: Carlos, Maria, Elsa, Pedro e Sara.

Admita que:

- na primeira volta, apenas a Elsa e o Pedro retificaram a parcela do mapa;
- a Elsa não voltou a retificar;
- o Carlos só retificou uma vez, quando a Elsa começou a volta;
- a Elsa começou a 3.<sup>a</sup> volta.

Identifique, justificando, os amigos a quem foram atribuídas parcelas do mapa nas primeiras três voltas.

3. A Elsa, que em 2018 fez um *Interrail*, relatou à Maria a sua viagem, explicando-lhe também algumas dificuldades na sua organização.

Uma das dificuldades foi decidir que países visitariam e, em cada país, a quantas cidades iriam.

O grupo de amigos da Elsa acabou por decidir que visitariam a Alemanha, a Áustria, a França, a Itália e a Suíça e que, em cada país, iriam apenas a uma cidade.

Admita que optaram por visitar:

- Munique, na Alemanha;
- Paris, em França;
- Zurique, na Suíça;
- Ou Viena ou Salzburgo, na Áustria;
- Ou Milão ou Veneza, em Itália.

Na Tabela 2, apresentam-se as distâncias, em quilómetros, entre as cidades que o grupo considerou mais atrativas.

Tabela 2

Munique / Viena – 430
Munique / Salzburgo – 140
Munique / Paris – 800
Munique / Milão – 500
Munique / Veneza – 520
Munique / Zurique – 340
Viena / Salzburgo – 290
Viena / Paris – 1230
Viena / Milão – 860
Viena / Veneza – 600
Viena / Zurique – 740
Salzburgo / Paris – 980
Salzburgo / Milão – 530
Salzburgo / Veneza – 460
Salzburgo / Zurique – 450
Paris / Milão – 850
Paris / Veneza – 1100
Paris / Zurique – 650
Milão / Veneza – 270
Milão / Zurique – 280
Veneza / Zurique – 540

Os amigos acordaram que o percurso a realizar seria definido selecionando-se apenas uma cidade de cada país e atendendo ao seguinte algoritmo:

- escolher a menor distância entre cidades, qualquer que ela seja;
- escolher, sucessivamente, as menores distâncias, garantindo que, partindo da mesma cidade, são selecionadas, no máximo, duas distâncias e não permitindo que se fechem percursos sem que todos os países sejam visitados.

Apresente um percurso possível, definido pelo grupo de amigos da Elsa, com início e fim na cidade de Paris.

Na sua resposta, apresente:

- a ordenação das distâncias selecionadas pelo algoritmo descrito;
- um percurso que o grupo de amigos da Elsa poderá ter definido.

4. No planeamento de uma viagem a uma cidade, a Maria e quatro amigos pesquisaram, *online*, os diferentes preços para um mesmo alojamento praticados por quatro plataformas de reserva, A, B, C e D.

Depois da pesquisa, selecionaram dois hotéis, H1 e H2.

Nas Tabelas 3 e 4 apresentam-se, respetivamente, os preços por noite, para um grupo de cinco pessoas, nas 4 plataformas, para os hotéis H1 e H2.

Tabela 3

Plataforma	Preço para o hotel H1
A	232,5 €
B	225 € *
C	245 €
D	215 €

\* Oferta de 10% de desconto sobre o preço indicado.

Tabela 4

Plataforma	Preço para o hotel H2
A	155 €
B	175 €
C	197,5 €
D	162,5 €

A cidade está dividida em três zonas de transportes públicos, 1, 2 e 3, situando-se o hotel H1 na zona 1 e o hotel H2 na zona 3.

O grupo de amigos pretende visitar o centro da cidade, que se situa na zona 1. Como tal, se os amigos reservarem o hotel H1, podem deslocar-se a pé. Caso reservem o hotel H2, terão de comprar um passe turístico para se deslocarem de transporte público desde a zona do hotel até ao centro da cidade.

Nas Tabelas 5 e 6, indicam-se os preços dos passes turísticos, por pessoa, em função das zonas e dos dias de utilização dos passes.

Tabela 5

N.º de dias	Zonas de 1 a 2
1 dia	10,55 €
2 dias	17,15 €
3 dias	23,40 €

Tabela 6

N.º de dias	Zonas de 1 a 3
1 dia	22,20 €
2 dias	33,70 €
3 dias	47,25 €

Um dos amigos efetuou cálculos, de modo a encontrar a solução mais económica para permanecerem na cidade duas noites e, se tal fosse o caso, adquiririam um passe turístico para três dias.

Qual é o hotel, H1 ou H2, que o grupo deve seleccionar?

Na sua resposta, apresente o custo total da estadia na cidade, para o grupo dos 5 amigos, caso os amigos fiquem no hotel H1 e caso fiquem no hotel H2.

5. Um hotel divulgou, no final do mês de maio de 2019, a variação do número de quartos ocupados em cada mês, relativamente ao mês anterior.

Na Tabela 7, apresentam-se os dados recolhidos, em percentagem.

Tabela 7

Mês	Variação
Março	10%
Abril	- 25%
Maio	50%

No mês de abril, o hotel registou uma ocupação de 198 quartos.

Quantos quartos foram ocupados no mês de março?

- a) 228
- b) 264
- c) 267
- d) 792



6. Num dos dias do *Interrail*, a Elsa sentiu-se febril. Mediu a temperatura corporal e, como estava com febre, tomou um medicamento e ficou no quarto do hotel.

Admita que a temperatura corporal da Elsa, em graus Celsius ( $^{\circ}\text{C}$ ),  $t$  horas após a toma do medicamento, é bem aproximada pelo modelo seguinte.

$$C(t) = 26 + 13e^{-0,008t} \quad \text{para } t \in [0, 24]$$

Considera-se  $t = 0$  o instante em que a Elsa tomou o medicamento.

6.1. Admita que a Elsa tomou o medicamento às 9 horas.

Se às 14 horas e 30 minutos a temperatura corporal da Elsa não tivesse diminuído, pelo menos,  $0,5^{\circ}\text{C}$ , seria necessário recorrer a outro medicamento.

Indique, justificando, se terá sido necessário recorrer a outro medicamento.

Na sua resposta, apresente todos os cálculos que efetuar.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve três casas decimais.

6.2. Preocupados com a Elsa, os amigos foram telefonando ao longo do dia.

Num dos telefonemas, a Elsa disse-lhes que a sua temperatura corporal era  $38^{\circ}\text{C}$ .

Quanto tempo decorreu entre a toma do medicamento e esse telefonema?

Apresente o resultado, em horas, arredondado às unidades.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve duas casas decimais.

7. Um dos aspetos mais importantes para que um *Interrail* decorra de acordo com o planeado é o cumprimento dos horários dos comboios.

Item obrigatório

7.1. Na Tabela 8, estão parcialmente registados os dados relativos aos tempos de atraso de comboios, em minutos, arredondados à unidade.

Tabela 8

Tempo de atraso (min)	N.º de comboios	Frequência absoluta acumulada
0		2
2		14
4	$a$	
5	13	37
$b$	13	
15		
17		100

Admita que a mediana do conjunto de dados apresentados na Tabela 8 é 11 minutos e que todos os valores em falta na tabela são diferentes de zero.

Determine os valores de  $a$  e de  $b$ .

**7.2.** O atraso dos comboios é um dos motivos que levam os clientes a apresentarem reclamações. Uma companhia ferroviária apresentou, no seu relatório de qualidade do ano 2019, o ponto de situação relativamente às reclamações apresentadas. Estas foram classificadas como concluídas (respondidas) ou pendentes (a aguardar resposta).

Na Tabela 9, indicam-se os dados referentes ao total das reclamações apresentadas e às apresentadas em duas das estações, E1 e E2.

Tabela 9

	Estado	
	Concluídas	Pendentes
Total	55%	45%
Estação E1	40%	60%
Estação E2	25%	75%

**7.2.1.** Sabe-se que, do conjunto das reclamações apresentadas em todas as estações daquela companhia, 13 680 se encontram pendentes e que, do total das reclamações apresentadas, 40% são da estação E2.

Quantas reclamações apresentadas na estação E2 estão pendentes?

**7.2.2.** Foram seleccionadas, ao acaso, duas das reclamações apresentadas.

A primeira foi escolhida de entre as apresentadas na estação E1 e a segunda foi escolhida de entre as apresentadas na estação E2.

Qual é a probabilidade de ambas se encontrarem no mesmo estado?

- a) 0,1
- b) 0,45
- c) 0,55
- d) 0,88

8. Sempre que viaja, a Maria efetua as reservas dos alojamentos utilizando quatro plataformas *online*, A, B, C e D, e nunca cancela nenhuma das reservas que efetua.

Com base nas reservas efetuadas pela Maria em cada uma das plataformas, construiu-se um gráfico circular dividido em quatro sectores circulares, dois deles com amplitude de  $45^\circ$ , um com amplitude de  $90^\circ$  e um com amplitude de  $180^\circ$ .

- 8.1. Depois da estadia, a Maria avalia, através da plataforma de reservas, a qualidade dos serviços prestados em cada um dos alojamentos.

Sabe-se que:

- um dos sectores de menor amplitude do gráfico circular corresponde às reservas efetuadas na plataforma A;
- quando fica em alojamentos reservados através da plataforma A, a Maria atribui ao alojamento a classificação de Muito Bom em metade dos casos;
- quando não fica em alojamentos reservados através da plataforma A, a Maria atribui ao alojamento a classificação de Muito Bom em apenas um de cada sete casos.

Escolhe-se, ao acaso, um alojamento a que Maria atribuiu Muito Bom.

Determine a probabilidade de esse alojamento ter sido reservado através da plataforma A.

- 8.2. Admita que, do gráfico circular descrito, o sector cuja amplitude é  $90^\circ$  corresponde às reservas efetuadas na plataforma C.

Das reservas que a Maria efetua:

- 10 são reservas realizadas na plataforma C;
- 30% são para alojamentos no estrangeiro;
- 20% são reservas realizadas na plataforma C e para alojamentos no estrangeiro.

Determine o número de reservas que não são realizadas através da plataforma C nem são para um alojamento no estrangeiro.

9. No final de um ano, fez-se um estudo estatístico relativo à variável aleatória «duração, em minutos, da viagem de comboio entre as estações E1 e E2».

Essa variável é bem modelada por uma distribuição normal com valor médio  $\mu$  e desvio padrão  $\sigma$ .

Escolhe-se, aleatoriamente, uma das viagens.

Admita que a probabilidade de essa viagem ter uma duração até 43 minutos é, aproximadamente, 0,72.

Qual pode ser o valor médio e o desvio padrão da variável em estudo?

a)  $\mu = 36; \sigma = 3$

b)  $\mu = 39; \sigma = 3$

c)  $\mu = 36; \sigma = 7$

d)  $\mu = 39; \sigma = 7$

10. Numa amostra aleatória de 256 pessoas que realizaram apenas um *Interrail* em 2019 verificou-se que, em média, visitaram 5 países e que o valor do desvio padrão dessa amostra é de 3,9.

Obtenha a margem de erro de um intervalo de confiança a 99% para o número médio de países visitados pelas pessoas que realizaram apenas um *Interrail* em 2019.

Apresente o resultado com arredondamento às centésimas.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve três casas decimais.

**FIM**

## COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 3 itens contribuem obrigatoriamente para a classificação final da prova

1. .... 20 pontos

2. .... 18 pontos

7.1. .... 18 pontos

**SUBTOTAL ..... 56 pontos**

Dos restantes 11 itens, contribuem para a classificação final da prova os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação (8 x 18 pontos = 144 pontos)

**3., 4., 5., 6.1., 6.2., 7.2.1. , 7.2.2., 8.1., 8.2., 9., 10.**

**TOTAL ..... 200 pontos**

# Formulário

---

## Modelos de grafos

### Condição necessária e suficiente para que um grafo conexo admita circuitos de Euler

Um grafo conexo admite circuitos de Euler se e só se todos os seus vértices forem de grau par.

## Probabilidades

### Teorema da probabilidade total e regra de Bayes

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = P(B) \times P(A | B) + P(\bar{B}) \times P(A | \bar{B})$$

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B) \times P(A | B)}{P(B) \times P(A | B) + P(\bar{B}) \times P(A | \bar{B})}$$

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) = \\ &= P(B_1) \times P(A | B_1) + P(B_2) \times P(A | B_2) + P(B_3) \times P(A | B_3) \end{aligned}$$

$$P(B_k | A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} = \frac{P(B_k) \times P(A | B_k)}{P(B_1) \times P(A | B_1) + P(B_2) \times P(A | B_2) + P(B_3) \times P(A | B_3)}$$

podendo  $k$  tomar os valores 1, 2 ou 3

### Distribuição normal

Se  $X$  é  $N(\mu, \sigma)$ , então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$$

---

## Intervalos de confiança

Intervalo de confiança para o valor médio  $\mu$  de uma variável normal  $X$ , admitindo que se conhece o desvio padrão da variável

$$\left] \bar{x} - z \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right[$$

$n$  – dimensão da amostra  
 $\bar{x}$  – média amostral  
 $\sigma$  – desvio padrão da variável  
 $z$  – valor relacionado com o nível de confiança (\*)

Intervalo de confiança para o valor médio  $\mu$  de uma variável  $X$ , admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left] \bar{x} - z \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z \frac{s}{\sqrt{n}} \right[$$

$n$  – dimensão da amostra  
 $\bar{x}$  – média amostral  
 $s$  – desvio padrão amostral  
 $z$  – valor relacionado com o nível de confiança (\*)

Intervalo de confiança para uma determinada proporção, admitindo que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left] p - z \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + z \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right[$$

$n$  – dimensão da amostra  
 $p$  – proporção amostral  
 $z$  – valor relacionado com o nível de confiança (\*)



---

(\*) Valores de  $z$  para os níveis de confiança mais usuais

Nível de confiança	$z$
90%	1,645
95%	1,960
99%	2,576