



---

EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

---

## **Prova Escrita de Matemática B**

---

11.º Ano de Escolaridade

---

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

---

### **Prova 735/Época Especial**

---

Critérios de Classificação

12 Páginas

---

**2015**

## CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

Os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração.

É classificada com zero pontos qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho.

A classificação das respostas aos itens com cotação igual ou superior a 20 pontos e que envolvam a produção de um texto tem em conta a clareza, a organização dos conteúdos e a utilização do vocabulário específico da Matemática.

As respostas que não apresentem exatamente os mesmos processos de resolução, termos ou expressões constantes dos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação de todos os elementos visualizados na sua utilização.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de resposta restrita que envolvam cálculos ou justificações.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto. O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplo: «recorrendo à regressão sinusoidal»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando a resolução do item exige cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.

Situação	Classificação
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não alterem o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado em centímetros, e a resposta apresenta-se em metros].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os critérios gerais e específicos de classificação.

Situação	Classificação
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos, no máximo, dois pontos à soma das pontuações atribuídas.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade onde, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

**Nota** – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

# CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

## GRUPO I

1.1. .... 15 pontos

Escrever uma expressão que permita calcular a média

$\left( \frac{0 \times a + 1 \times 25 + 2 \times 15 + 3 \times 11 + 4 \times b + 5 \times 10}{100} \right)$  ou equivalente) ..... 4 pontos

Igualar a expressão anterior a 1,7 ..... 2 pontos

Obter  $138 + 4b = 170$  ..... 2 pontos

Obter  $b = 8$  ..... 2 pontos

Escrever  $a + 25 + 15 + 11 + 8 + 10 = 100$  ..... 4 pontos

Obter  $a = 31$  ..... 1 ponto

1.2. .... 15 pontos

Determinar os valores da variável aleatória  $X$  (0, 2, 3, 4, 5 e 6)

(ver nota 1) ..... (1 × 6) ..... 6 pontos

Determinar  $P(X = 0)$ ,  $P(X = 4)$  e  $P(X = 6)$   $\left(\frac{1}{9}\right)$  (ver nota 1) .. (1 × 3) .. 3 pontos

Determinar  $P(X = 2)$ ,  $P(X = 3)$  e  $P(X = 5)$   $\left(\frac{2}{9}\right)$  (ver nota 1) .. (1 × 3) .. 3 pontos

Apresentar a tabela pedida (ver nota 2) ..... 3 pontos

### Notas:

1. Se os valores indicados forem apresentados sem qualquer justificação, a pontuação máxima a atribuir ao conjunto destas três etapas deverá ser 6 pontos.

2. Se a soma dos valores das probabilidades não for igual 1, a pontuação a atribuir a esta etapa deverá ser 1 ponto.

2.1. .... 10 pontos

Escrever  $\text{tg } \theta = \frac{\overline{AE}}{6}$  ..... 4 pontos

Escrever  $\overline{AE} = 6 \text{ tg } \theta$  ..... 2 pontos

Escrever uma expressão da área do triângulo  $[AED]$

$\left( \frac{6 \times 6 \text{ tg } \theta}{2} \right)$  ou equivalente) ..... 3 pontos

Concluir que  $T(\theta) = 18 \text{ tg } \theta$  ..... 1 ponto

**2.2. .... 20 pontos**

- Referir que a área do quadrado é 36 ..... 2 pontos
- Obter uma expressão da área do trapézio  $[EBCD]$  ( $36 - 18 \operatorname{tg} \theta$  ou equivalente) 4 pontos
- Escrever  $18 \operatorname{tg} \theta = \frac{36 - 18 \operatorname{tg} \theta}{2}$  (ou equivalente) ..... 4 pontos
- Resolver a igualdade anterior ..... 9 pontos

Esta etapa pode ser resolvida por, pelo menos, dois processos.

**1.º Processo**

- Obter  $36 \operatorname{tg} \theta = 36 - 18 \operatorname{tg} \theta$  ..... 2 pontos
- Obter  $54 \operatorname{tg} \theta = 36$  ..... 2 pontos
- Obter  $\operatorname{tg} \theta = \frac{36}{54}$  ..... 1 ponto
- Reconhecer que  $\theta = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{36}{54}\right)$  ..... 2 pontos
- Obter  $\theta = 33,6\dots$  ..... 2 pontos

**2.º Processo**

- Representar graficamente a função definida por  $y = 18 \operatorname{tg} \theta$  ..... 3 pontos
  - Respeitar a forma do gráfico ..... 2 pontos
  - Respeitar o domínio ..... 1 ponto
- Representar graficamente a função definida por  $y = \frac{36 - 18 \operatorname{tg} \theta}{2}$  3 pontos
  - Respeitar a forma do gráfico ..... 2 pontos
  - Respeitar o domínio ..... 1 ponto
- Assinalar o ponto de intersecção dos gráficos ..... 1 ponto
- Obter a abcissa desse ponto (33,6...) ..... 2 pontos
- Apresentar o valor pedido ( $34^\circ$ ) ..... 1 ponto

**GRUPO II**

**1. .... 10 pontos**

- Reconhecer que o problema se pode traduzir por uma equação do tipo  $A e^{-0,11t} = B e^{-0,11t}$ , em que  $A$  e  $B$  são números reais positivos ..... 4 pontos
- Referir que a equação anterior é equivalente a  $A = B$  ..... 4 pontos
- Concluir que, para que, num mesmo instante, as massas de actínio 288 nas duas substâncias fossem iguais, era necessário que anteriormente, num dado instante, as massas também tivessem sido iguais ..... 2 pontos

**2.1. .... 20 pontos**

- Reconhecer que 50 corresponde à massa de actínio 288 presente na substância às 10 horas ..... 3 pontos
- Reconhecer que o problema se pode traduzir pela equação  $50e^{-0,11t} = 25$  (ou equivalente) ..... 3 pontos
- Resolver a equação anterior ..... 10 pontos

Esta etapa pode ser resolvida por, pelo menos, dois processos.

**1.º Processo**

- Obter  $e^{-0,11t} = 0,5$  ..... 2 pontos
- Obter  $-0,11t = \ln 0,5$  ..... 4 pontos
- Obter  $t = -\frac{\ln 0,5}{0,11}$  ..... 2 pontos
- Obter  $t = 6,3013\dots$  ..... 2 pontos

**2.º Processo**

- Representar graficamente a função  $Q_1$  ..... 5 pontos
  - Respeitar a forma do gráfico ..... 3 pontos
  - Respeitar o domínio ..... 2 pontos
- Representar graficamente a reta de equação  $y = 25$  ..... 2 pontos
- Assinalar o ponto de intersecção dos gráficos ..... 1 ponto
- Obter a abcissa desse ponto (6,3013...) ..... 2 pontos
- Obter 6 horas e 18 minutos ..... 2 pontos
- Apresentar o valor pedido (16 horas e 18 minutos) ..... 2 pontos

**2.2. .... 5 pontos**

Níveis	Descritores do nível de desempenho	Pontuação
2	Na resposta, é apresentado o valor $\frac{75}{50}$ (ou equivalente).	5
1	Na resposta, é apresentado o valor $\frac{50}{75}$ (ou equivalente).	2

### GRUPO III

1. .... **15 pontos**
- Escrever uma expressão do volume total das duas semiesferas  $\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$  ..... 2 pontos
- Escrever uma expressão do volume do cilindro  $(\pi r^2 h)$  ..... 2 pontos
- Obter uma expressão do volume do reservatório  $\left(\frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h\right)$  ..... 2 pontos
- Escrever  $\frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h = 1000$  ..... 3 pontos
- Resolver a equação anterior em ordem a  $h$  ..... 6 pontos
- Desembaraçar a equação de denominadores ..... 2 pontos
- Isolar o termo em  $h$  num dos membros da equação ..... 2 pontos
- Concluir que  $h = \frac{3000 - 4\pi r^3}{3\pi r^2}$  ..... 2 pontos

2. .... **10 pontos**
- Reconhecer que  $h > 0$  ..... 1 ponto
- Escrever  $\frac{3000 - 4\pi r^3}{3\pi r^2} > 0$  ..... 2 pontos
- Resolver a inequação anterior ..... 6 pontos

Esta etapa pode ser resolvida por, pelo menos, dois processos.

**1.º Processo**

Representar graficamente a função real de variável real definida por

$y = \frac{3000 - 4\pi x^3}{3\pi x^2}$  ..... 3 pontos

Assinalar o ponto de intersecção do gráfico desta função com o eixo das abcissas ..... 1 ponto

Obter a abcissa desse ponto  $(6,2\dots)$  ..... 2 pontos

**2.º Processo**

Obter  $3000 - 4\pi r^3 > 0$  ..... 1 ponto

Obter  $r^3 < \frac{3000}{4\pi}$  ..... 2 pontos

Obter  $r < \sqrt[3]{\frac{3000}{4\pi}}$  ..... 2 pontos

Obter  $r < 6,2\dots$  ..... 1 ponto

Concluir o pretendido ..... 1 ponto



3. .... **15 pontos**
- Substituir  $r$  por 3 na expressão de  $h$  ..... 2 pontos
- Obter  $h$  (31,367...) ..... 2 pontos
- Calcular o valor da área da superfície cilíndrica (591,268...) ..... 4 pontos
- Calcular o valor da área total das duas superfícies semiesféricas (113,097...) ... 4 pontos
- Calcular o valor da área total da superfície do reservatório (704,365...) ..... 2 pontos
- Apresentar o valor pedido ( $704 \text{ dm}^2$ ) ..... 1 ponto

4. .... **10 pontos**

Níveis	Descritores do nível de desempenho	Pontuação
3	Na resposta, é referido que, quanto maior for o valor do raio da base do cilindro, menor terá de ser o valor da altura da superfície cilíndrica. OU Na resposta, é referido que, quanto menor for o valor do raio da base do cilindro, maior terá de ser o valor da altura da superfície cilíndrica.	10
2	Na resposta, é referido que, quanto maior for o valor da altura da superfície cilíndrica, menor terá de ser o valor do raio da base do cilindro. OU Na resposta, é referido que, quanto menor for o valor da altura da superfície cilíndrica, maior terá de ser o valor do raio da base do cilindro.	7
1	Na resposta, apenas é referido que a função $h$ é decrescente.	4

## GRUPO IV

- 1.1. .... **15 pontos**
- Calcular o número de árvores de cada lado da avenida ..... 4 pontos
- Obter o quociente entre a distância da primeira à última árvore e a distância entre duas árvores consecutivas (75) ..... 2 pontos
- Concluir que são 76 árvores ..... 2 pontos
- Reconhecer que as distâncias percorridas para estrumar cada uma das árvores de cada lado da avenida são termos consecutivos de uma progressão aritmética de primeiro termo 64 e de razão 16,8 ..... 3 pontos
- Obter o termo de ordem 76 ( $64 + 16,8 \times 75$  ou equivalente) ..... 3 pontos
- Reconhecer que a distância percorrida pelo trisavô do João em cada lado da avenida corresponde a  $S_{76}$  ..... 1 ponto
- Escrever uma expressão de  $S_{76}$  ..... 2 pontos
- Obter 52 744 ..... 1 ponto
- Concluir que a distância percorrida pelo trisavô do João é 105 488 metros ..... 1 ponto

**1.2. .... 10 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

**1.º Processo**

Calcular a distância percorrida pelo trisavô do João num dia de trabalho (14 625 m) ..... 4 pontos

Obter o número de dias de trabalho que a realização da tarefa demorava (7,21...) ..... 4 pontos

Apresentar o valor pedido (7 dias e 2 horas de trabalho) ..... 2 pontos

**2.º Processo**

Calcular o total de horas de trabalho que a realização da tarefa demorava (64,91...) ..... 4 pontos

Obter o número de dias de trabalho que a realização da tarefa demorava (7,21...) ..... 4 pontos

Apresentar o valor pedido (7 dias e 2 horas de trabalho) ..... 2 pontos

**2.1. .... 10 pontos**

Calcular o número de quilogramas de estrume necessários para produzir 100 quilogramas de adubo A (200) ..... 3 pontos

Calcular o número de quilogramas de estrume necessários para produzir 100 quilogramas de adubo B (300) ..... 3 pontos

Calcular o número total de quilogramas de estrume necessários para produzir 100 quilogramas de adubo A e 100 quilogramas de adubo B (500) ..... 1 ponto

Referir que a restrição relativa à disponibilidade de estrume não é cumprida ..... 2 pontos

Concluir que, num mesmo dia, as quantidades referidas não podiam ter sido produzidas ..... 1 ponto

Tópicos de resposta:

- interpretar, justificando no contexto do problema, o significado da expressão I;
- interpretar, justificando no contexto do problema, o significado da expressão II;
- interpretar, justificando no contexto do problema, o significado da expressão III.

Níveis	Descritores do nível de desempenho	Pontuação
6	Na resposta, são apresentados os três tópicos, de forma clara e organizada e com vocabulário específico adequado.	20
5	Na resposta, são apresentados os três tópicos, com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização do vocabulário específico.	17
4	Na resposta, apenas são apresentados dois tópicos, de forma clara e organizada e com vocabulário específico adequado.	14
3	Na resposta, apenas são apresentados dois tópicos, com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização do vocabulário específico.	11
2	Na resposta, apenas é apresentado um tópico, de forma clara e organizada e com vocabulário específico adequado.	8
1	Na resposta, apenas é apresentado um tópico, com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização do vocabulário específico.	5

Exemplo de resposta:

*Ao serem produzidos diariamente  $x$  quilogramas de adubo A e  $y$  quilogramas de adubo B:*

- *a expressão  $5x + 6y$  corresponde ao lucro, em tostões, proveniente da venda do adubo produzido, porque cada quilograma de adubo A dava um lucro de 5 tostões e cada quilograma de adubo B dava um lucro de 6 tostões;*
- *a expressão  $2x + 3y \leq 450$  traduz a limitação diária da quantidade de estrume, porque, para produzir um quilograma de adubo A, eram necessários 2 quilogramas de estrume e, para produzir um quilograma de adubo B, eram necessários 3 quilogramas de estrume, e a fábrica podia utilizar diariamente até 450 quilogramas de estrume;*
- *a expressão  $0,5x + 0,25y \leq 80$  é referente à limitação diária de horas de trabalho, porque cada quilograma de adubo A exigia meia hora de trabalho de um operário e cada quilograma de adubo B exigia um quarto de hora de trabalho de um operário, sendo 80 o número de horas diárias correspondentes ao trabalho dos oito operários da fábrica.*

## COTAÇÕES

### GRUPO I

1.		
1.1.	.....	15 pontos
1.2.	.....	15 pontos
2.		
2.1.	.....	10 pontos
2.2.	.....	20 pontos
		<hr/>
		<b>60 pontos</b>

### GRUPO II

1.	.....	10 pontos
2.		
2.1.	.....	20 pontos
2.2.	.....	5 pontos
		<hr/>
		<b>35 pontos</b>

### GRUPO III

1.	.....	15 pontos
2.	.....	10 pontos
3.	.....	15 pontos
4.	.....	10 pontos
		<hr/>
		<b>50 pontos</b>

### GRUPO IV

1.		
1.1.	.....	15 pontos
1.2.	.....	10 pontos
2.		
2.1.	.....	10 pontos
2.2.	.....	20 pontos
		<hr/>
		<b>55 pontos</b>

**TOTAL** ..... **200 pontos**