Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Prova 635/1.ª Fase 13 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2010

VERSÃO 2

Na folha de respostas, indique, de forma legível, a versão da prova.

A ausência dessa indicação implica a classificação com zero pontos das respostas aos itens do Grupo I.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta, excepto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, de desenhos ou de outras representações, que podem ser, primeiramente, elaborados a lápis, sendo, a seguir, passados a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica, sempre que for necessário.

Não é permitido o uso de corrector. Em caso de engano, deve riscar, de forma inequívoca, aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva, de forma legível, a numeração dos grupos e dos itens, bem como as respectivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

Para responder aos itens de escolha múltipla, escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção correcta.

Não apresente cálculos, nem justificações.

A prova inclui, na página 4, um Formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\, r$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\dfrac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\dfrac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Sector circular: $\dfrac{\alpha\, r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
(r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
(r – *raio*)

Volumes

Pirâmide: $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\dfrac{4}{3}\,\pi\, r^3$
(r – *raio*)

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis} \dfrac{\theta + 2k\pi}{n},\ k \in \{0, ..., n-1\}$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + ... + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1(x_1-\mu)^2 + ... + p_n(x_n-\mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cdot \cos u$

$(\cos u)' = -\, u' \cdot \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

GRUPO I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, seleccione a única opção correcta.

Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção seleccionada.

Não apresente cálculos, nem justificações.

1. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória, e sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega)$.

Sabe-se que:

- $P(A) = 30\%$;
- $P(A \cup B) = 70\%$;
- A e B são incompatíveis.

Qual é o valor de $P(B)$?

(A) 61% **(B)** 60% **(C)** 40% **(D)** 21%

2. Num grupo de dez trabalhadores de uma fábrica, vão ser escolhidos três, ao acaso, para frequentarem uma acção de formação. Nesse grupo de dez trabalhadores, há três amigos, o João, o António e o Manuel, que gostariam de frequentar essa acção.

Qual é a probabilidade de serem escolhidos, exactamente, os três amigos?

(A) $\dfrac{3}{{}^{10}C_3}$ **(B)** $\dfrac{1}{{}^{10}C_3}$ **(C)** $\dfrac{3}{{}^{10}A_3}$ **(D)** $\dfrac{1}{{}^{10}A_3}$

3. A tabela de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é a seguinte.

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\dfrac{1}{5}$	$\dfrac{1}{2}$	2a	a

Qual das igualdades seguintes é verdadeira, considerando os valores da tabela?

(A) $P(X < 2) = P(X = 3)$

(B) $P(X = 0) = P(X = 3)$

(C) $P(X = 0) = P(X = 2)$

(D) $P(X = 0) = P(X > 1)$

4. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função afim f, de domínio $\mathbb{R}$

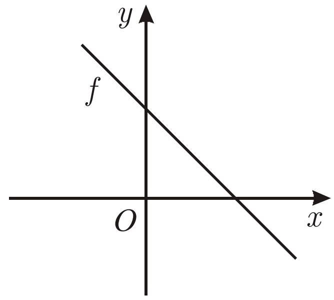
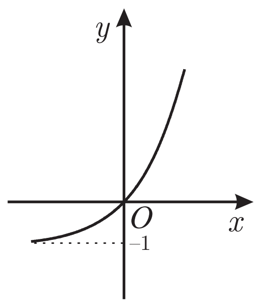


Figura 1

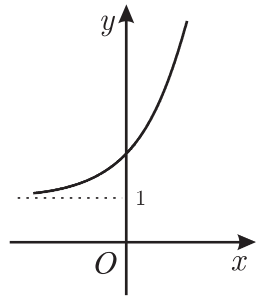
Seja h a função definida por $h(x) = f(x) + e^x$

Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função h'', segunda derivada de h?

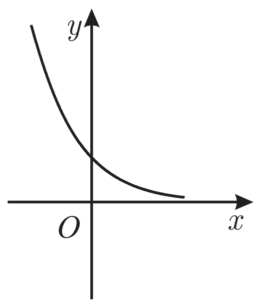
(A)



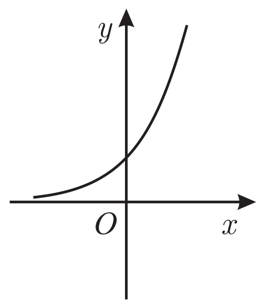
(B)



(C)



(D)



5. Na Figura 2, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função f, contínua, de domínio $]-\infty, 1[$

Tal como a Figura 2 sugere, a recta de equação $x = 1$ é assimptota do gráfico de f

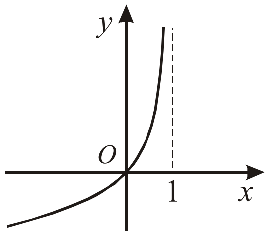


Figura 2

Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{3x}{f(x)}$?

(A) $+\infty$ **(B)** 0 **(C)** 3 **(D)** $-\infty$

6. Seja g a função, de domínio $]-2, +\infty[$, definida por $g(x) = \ln(x+2)$

Considere, num referencial o.n. xOy, um triângulo $[OAB]$ tal que:

- O é a origem do referencial;
- A é um ponto de ordenada 5;
- B é o ponto de intersecção do gráfico da função g com o eixo das abcissas.

Qual é a área do triângulo $[OAB]$?

(A) $\dfrac{\ln 2}{2}$ **(B)** $\dfrac{5 \ln 2}{2}$ **(C)** $\dfrac{1}{2}$ **(D)** $\dfrac{5}{2}$

7. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = 3\ \mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{8} - \theta\right)$, com $\theta \in \mathbb{R}$

Para qual dos valores seguintes de θ podemos afirmar que z é um número imaginário puro?

(A) $\frac{5\pi}{8}$

(B) $\frac{\pi}{8}$

(C) $\frac{\pi}{2}$

(D) $-\frac{\pi}{2}$

8. Na Figura 3, está representada, no plano complexo, a sombreado, parte do semiplano definido pela condição $\mathrm{Re}(z) > 3$

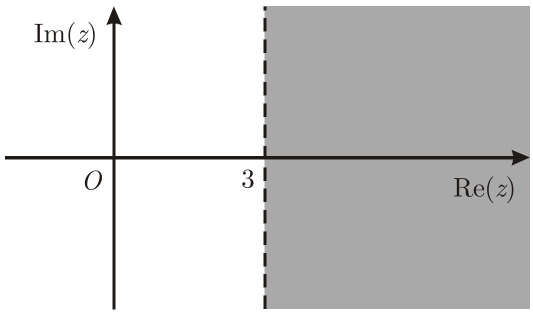


Figura 3

Qual dos números complexos seguintes tem a sua imagem geométrica na região representada a sombreado?

(A) $3\sqrt{3}\ \mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$

(B) $\sqrt{3}\ \mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$

(C) $3\sqrt{3}\ \mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)$

(D) $\sqrt{3}\ \mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)$

GRUPO II

Nas respostas aos itens deste grupo, apresente **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{7}\right)$ e $z_2 = 2 + i$

Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

1.1. Determine o número complexo $w = \dfrac{3 - i \times (z_1)^7}{\overline{z_2}}$

(i designa a unidade imaginária, e $\overline{z_2}$ designa o conjugado de z_2)

Apresente o resultado na forma trigonométrica.

1.2. Mostre que $\left|z_1 + z_2\right|^2 = 6 + 4\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + 2\ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right)$

2. Dos alunos de uma escola, sabe-se que:

- a quinta parte dos alunos tem computador portátil;
- metade dos alunos não sabe o nome do director;
- a terça parte dos alunos que não sabe o nome do director tem computador portátil.

2.1. Determine a probabilidade de um aluno dessa escola, escolhido ao acaso, não ter computador portátil e saber o nome do director.

Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

2.2. Admita que essa escola tem 150 alunos. Pretende-se formar uma comissão de seis alunos para organizar a viagem de finalistas.

Determine de quantas maneiras diferentes se pode formar uma comissão com, exactamente, quatro dos alunos que têm computador portátil.

3. Considere o problema seguinte:

«Num saco, estão dezoito bolas, de duas cores diferentes, de igual tamanho e textura, indistinguíveis ao tacto. Das dezoito bolas do saco, doze bolas são azuis, e seis bolas são vermelhas.

Se tirarmos duas bolas do saco, simultaneamente, ao acaso, qual é a probabilidade de elas formarem um par da mesma cor?»

Uma resposta correcta para este problema é $\dfrac{12\times 11+6\times 5}{18\times 17}$

Numa composição, explique porquê.

A sua composição deve incluir:

- uma referência à regra de Laplace;
- uma explicação do número de casos possíveis;
- uma explicação do número de casos favoráveis.

4. Na *Internet*, no dia 14 de Outubro de 2009, pelas 14 horas, colocaram-se à venda todos os bilhetes de um espectáculo. O último bilhete foi vendido cinco horas após o início da venda.

Admita que, t horas após o início da venda, o número de bilhetes vendidos, em **centenas**, é dado, aproximadamente, por

$$N(t) = 8\log_4(3t+1)^3 - 8\log_4(3t+1), \quad t \in [0, 5]$$

Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

4.1. Mostre que $N(t) = 16\log_4(3t+1)$, para qualquer $t \in [0, 5]$

4.2. Determine quanto tempo foi necessário para vender 2400 bilhetes.

Apresente o resultado em horas e minutos.

Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais, apresentando os minutos arredondados às unidades.

5. Considere uma função f, de domínio $]0,\, 3[$, cuja derivada f', de domínio $]0,\, 3[$, é definida por

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{x}$$

Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora.

Na sua resposta, deve:

- reproduzir o gráfico da função, ou os gráficos das funções, que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar os intervalos de monotonia da função f;
- assinalar e indicar as coordenadas dos pontos relevantes, com arredondamento às centésimas.

6. Considere a função f, de domínio $]-\infty,\, 2\pi]$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} ax + b + e^x & \text{se} \quad x \leq 0 \\ \\ \dfrac{x - \operatorname{sen}(2x)}{x} & \text{se} \quad 0 < x \leq 2\pi \end{cases} \qquad \text{com } a,\, b \in \mathbb{R}$$

Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

6.1. Prove que a recta de equação $y = ax + b$, com $a \neq 0$, é uma assimptota oblíqua do gráfico de f

6.2. Determine o valor de b, de modo que f seja contínua em $x = 0$

7. Na Figura 4, estão representados, num referencial o.n. xOy, uma circunferência e o triângulo $[OAB]$.

Sabe-se que:

- a circunferência tem diâmetro $[OA]$;
- o ponto A tem coordenadas $(2,\ 0)$;
- o vértice O do triângulo $[OAB]$ coincide com a origem do referencial;
- o ponto B desloca-se ao longo da semicircunferência superior.

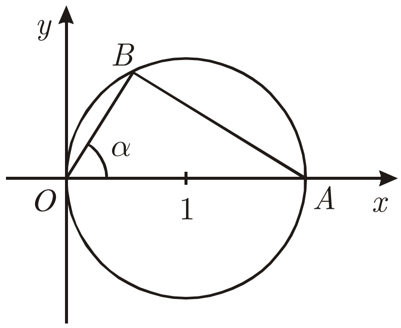


Figura 4

Para cada posição do ponto B, seja α a amplitude do ângulo AOB, com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

7.1. Mostre que o perímetro do triângulo $[OAB]$ é dado, em função de α, por

$$f(\alpha) = 2(1 + \cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha)$$

7.2. Determine o valor de α para o qual o perímetro do triângulo $[OAB]$ é máximo.

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

(8 × 5 pontos)		**40 pontos**

GRUPO II

1.		
1.1.	15 pontos	
1.2.	15 pontos	
2.		
2.1.	15 pontos	
2.2.	10 pontos	
3.	15 pontos	
4.		
4.1.	10 pontos	
4.2.	15 pontos	
5.	15 pontos	
6.		
6.1.	15 pontos	
6.2.	10 pontos	
7.		
7.1.	10 pontos	
7.2.	15 pontos	
		160 pontos

TOTAL	**200 pontos**