

**EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO**  
**12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)**  
**Cursos Gerais**

Duração da prova: 120 minutos  
2006

1.ª FASE

**PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA**

---

**VERSÃO 2**

**Na sua folha de respostas, indique  
claramente a versão da prova.**

**A ausência desta indicação implicará a  
anulação de todo o GRUPO I.**

# Formulário

## Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha r$  ( $\alpha$  – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;  $r$  – raio)

## Áreas de figuras planas

Losango:  $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio:  $\frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Polígono regular:  $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Sector circular:  $\frac{\alpha r^2}{2}$  ( $\alpha$  – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;  $r$  – raio)

## Áreas de superfícies

Área lateral de um cone:  $\pi r g$   
( $r$  – raio da base;  $g$  – geratriz)

Área de uma superfície esférica:  $4 \pi r^2$   
( $r$  – raio)

## Volumes

Pirâmide:  $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone:  $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera:  $\frac{4}{3} \pi r^3$  ( $r$  – raio)

## Trigonometria

$\text{sen}(a + b) = \text{sen } a \cdot \cos b + \text{sen } b \cdot \cos a$

$\text{cos}(a + b) = \text{cos } a \cdot \cos b - \text{sen } a \cdot \text{sen } b$

$\text{tg}(a + b) = \frac{\text{tg } a + \text{tg } b}{1 - \text{tg } a \cdot \text{tg } b}$

## Complexos

$(\rho \text{ cis } \theta)^n = \rho^n \text{ cis } (n \theta)$

$\sqrt[n]{\rho \text{ cis } \theta} = \sqrt[n]{\rho} \text{ cis } \frac{\theta + 2k\pi}{n}$ ,  $k \in \{0, \dots, n-1\}$

## Progressões

Soma dos  $n$  primeiros termos de uma

Prog. Aritmética:  $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica:  $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

## Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$  ( $n \in \mathbb{R}$ )

$(\text{sen } u)' = u' \cdot \text{cos } u$

$(\text{cos } u)' = -u' \cdot \text{sen } u$

$(\text{tg } u)' = \frac{u'}{\text{cos}^2 u}$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$  ( $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ )

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$  ( $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ )

## Limites notáveis

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

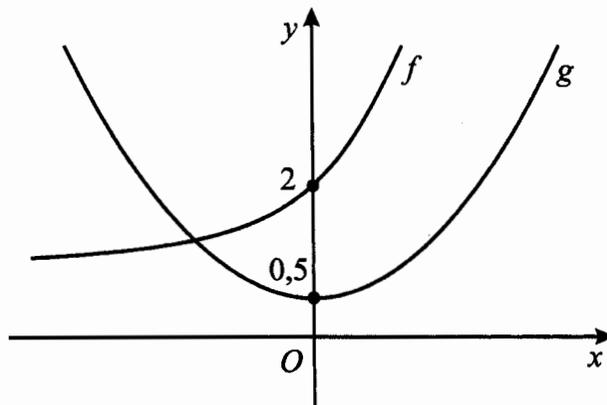
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$  ( $p \in \mathbb{R}$ )

## Grupo I

- Os sete itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada um deles, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma letra, o item será anulado, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações.**

1. Na figura estão representadas, em referencial o.n.  $xOy$ , partes dos gráficos de duas funções,  $f$  e  $g$ , contínuas em  $\mathbb{R}$ .  
Tal como a figura sugere,
- nenhum dos gráficos intersecta o eixo  $Ox$ ;
  - os gráficos de  $g$  e de  $f$  intersectam o eixo  $Oy$  nos pontos de ordenadas 0,5 e 2, respectivamente.



Apenas uma das equações seguintes é impossível. Qual delas?

- (A)  $f(x) \times g(x) = 1$                       (B)  $\frac{f(x)}{g(x)} = 1$
- (C)  $f(x) - g(x) = 0$                       (D)  $f(x) + g(x) = 0$

2. Seja  $h$  a função, de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por

$$h(x) = \frac{\ln(\sqrt{e^x})}{2} \quad (\ln \text{ designa logaritmo de base } e)$$

Qual das seguintes expressões pode também definir  $h$  ?

- (A)  $\frac{x}{4}$                       (B)  $\frac{x}{2}$                       (C)  $\frac{\sqrt{x}}{2}$                       (D)  $\sqrt{x}$

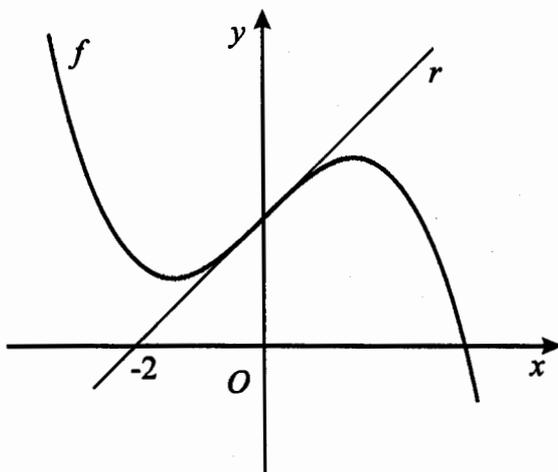
3. Seja  $g$  a função definida em  $\mathbb{R}$  por  $g(x) = \frac{e^x + 5}{2 + \cos x}$

Considere a sucessão de termo geral  $u_n = \frac{n+1}{n^2}$

Indique o valor de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(u_n)$

- (A) 1                      (B) 2                      (C) 3                      (D) 4

4. Na figura está representada parte do gráfico de uma função polinomial  $f$ . Tal como a figura sugere, o gráfico de  $f$  tem a concavidade voltada para cima em  $]-\infty, 0]$  e voltada para baixo em  $[0, +\infty[$ .



A recta  $r$ , tangente ao gráfico de  $f$  no ponto de abscissa 0, é paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares e intersecta o eixo  $Ox$  no ponto de abscissa  $-2$ .

Sabendo que  $f'$  e  $f''$  designam, respectivamente, a primeira e a segunda derivadas de  $f$ , indique o valor de  $f(0) + f'(0) + f''(0)$

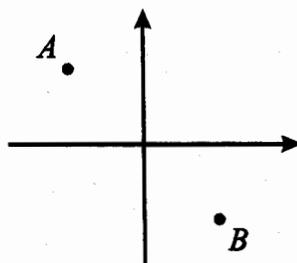
- (A) 4                      (B) 3                      (C) 2                      (D) 1

5. Uma variável aleatória  $X$  tem a seguinte distribuição de probabilidades:

$x_i$	0	1
$P(X = x_i)$	$\frac{{}^{2005}C_{99}}{{}^{2006}C_{100}}$	$\frac{a}{{}^{2006}C_{100}}$

Indique o valor de  $a$ .

- (A)  ${}^{2005}C_{99}$       (B)  ${}^{2005}C_{100}$       (C)  ${}^{2006}C_{99}$       (D)  ${}^{2006}C_{100}$
6. Seja  $\Omega$  o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam  $A$  e  $B$  dois acontecimentos ( $A \subset \Omega$  e  $B \subset \Omega$ ). Sabe-se que  $P(A) = 0,3$ . Apenas um dos acontecimentos seguintes pode ter probabilidade inferior a 0,3. Qual deles?
- (A)  $A \cap B$       (B)  $\bar{A} \cup B$       (C)  $A \cup B$       (D)  $\overline{A \cap B}$
7. Os pontos  $A$  e  $B$ , representados na figura, são as imagens geométricas, no plano complexo, das raízes quadradas de um certo número complexo  $z$ .



Qual dos números complexos seguintes pode ser  $z$ ?

- (A)  $i$       (B)  $-i$       (C)  $1$       (D)  $-1$

## Grupo II

Nos itens deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

**Atenção:** quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Seja  $\mathbb{C}$  o conjunto dos números complexos;  $i$  designa a unidade imaginária.

1.1. Sem recorrer à calculadora, determine  $\frac{4 + 2i \left(\operatorname{cis} \frac{\pi}{6}\right)^6}{3 + i}$ , apresentando o resultado final na forma trigonométrica.

1.2. Considere que, para qualquer número complexo  $z$  não nulo,  $\arg(z)$  designa o argumento de  $z$  que pertence ao intervalo  $[0, 2\pi[$ .

Represente a região do plano complexo definida pela condição, em  $\mathbb{C}$ ,

$$\frac{1}{2} \leq |z| \leq 1 \quad \wedge \quad \frac{3\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \frac{5\pi}{4}$$

e determine a sua área.

2.

2.1. Uma coluna com a forma de um prisma hexagonal regular está assente no chão de um jardim. Dispomos de seis cores (amarelo, branco, castanho, dourado, encarnado e verde) para pintar as sete faces visíveis (as seis faces laterais e a base superior) desse prisma.

Admita que se pintam de verde duas faces laterais opostas.

Determine de quantas maneiras diferentes podem ficar pintadas as restantes cinco faces, de tal modo

- que duas faces que tenham uma aresta comum fiquem pintadas com cores diferentes
- e que duas faces laterais que sejam opostas fiquem pintadas com a mesma cor.

2.2. Considere um prisma hexagonal regular num referencial o.n.  $Oxyz$ , de tal forma que uma das suas bases está contida no plano de equação  $z = 2$ .

Escolhendo ao acaso dois vértices do prisma, qual é a probabilidade de eles definirem uma recta paralela ao eixo  $Oz$ ? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

3. De uma caixa com dez bolas brancas e algumas bolas pretas, extraem-se sucessivamente, e ao acaso, duas bolas, não repondo a primeira bola extraída, antes de retirar a segunda. Considere os acontecimentos:

$A$ : «a primeira bola extraída é preta»;

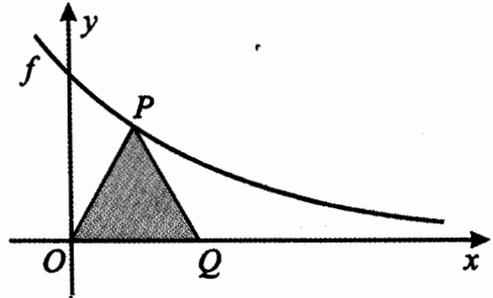
$B$ : «a segunda bola extraída é branca».

Sabe-se que  $P(B|A) = \frac{1}{2}$  ( $P(B|A)$  designa probabilidade de  $B$ , se  $A$ )

Quantas bolas pretas estão inicialmente na caixa? Numa pequena composição, justifique a sua resposta, começando por explicar o significado de  $P(B|A)$ , no contexto da situação descrita.

4. Na figura estão representados:

- parte do gráfico da função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = e^{-x}$
- um triângulo isósceles  $[OPQ]$  ( $\overline{PO} = \overline{PQ}$ ), em que:
  - $O$  é a origem do referencial;
  - $P$  é um ponto do gráfico de  $f$ ;
  - $Q$  pertence ao eixo das abcissas.



Considere que o ponto  $P$  se desloca no primeiro quadrante (eixos não incluídos), ao longo do gráfico de  $f$ .

O ponto  $Q$  acompanha o movimento do ponto  $P$ , deslocando-se ao longo do eixo das abcissas, de tal modo que  $\overline{PO}$  permanece sempre igual a  $\overline{PQ}$ .

Seja  $A$  a função, de domínio  $\mathbb{R}^+$ , que faz corresponder, à abcissa  $x$  do ponto  $P$ , a área do triângulo  $[OPQ]$ .

4.1. Mostre que, para cada  $x \in \mathbb{R}^+$ , se tem  $A(x) = x e^{-x}$

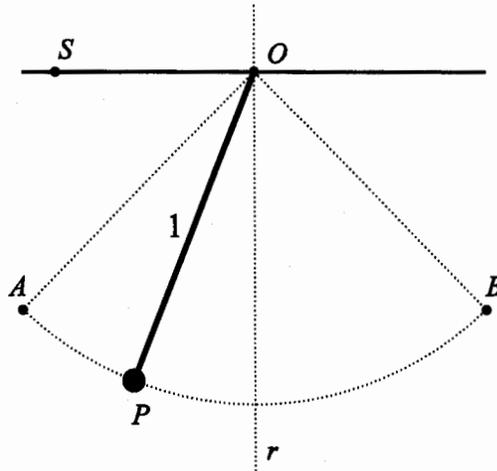
4.2. Sem recorrer à calculadora, estude a função  $A$  quanto à monotonia e conclua qual é o valor máximo que a área do triângulo  $[OPQ]$  pode assumir.

5. De uma certa função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , sabe-se que:

- $f$  é contínua;
- a recta de equação  $y = x$  é assíntota do gráfico de  $f$ , quer quando  $x \rightarrow +\infty$ , quer quando  $x \rightarrow -\infty$ .

Mostre que o gráfico da função  $g$ , definida, em  $\mathbb{R}$ , por  $g(x) = x f(x)$ , não tem qualquer assíntota.

6. Na figura está representada uma esfera suspensa de um fio com 1 metro de comprimento, fixo no ponto  $O$ .



O centro da esfera oscila entre os pontos  $A$  e  $B$ , que são simétricos relativamente à recta vertical  $r$ .

A recta  $r$  passa pelo ponto  $O$  e é perpendicular à recta  $OS$ .

No instante inicial, o centro da esfera coincide com o ponto  $A$ .

Admita que,  $t$  segundos após esse instante inicial, o centro da esfera está num ponto  $P$  tal que a amplitude, em radianos, do ângulo  $SOP$  é dada (aproximadamente) por

$$\alpha(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \cos(\sqrt{9,8} t)$$

Nas duas alíneas seguintes, **não utilize a calculadora**, a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos.

- 6.1. Determine a distância do centro da esfera à recta  $OS$ , no instante inicial.
- 6.2. Determine o instante em que o centro da esfera passa pela primeira vez na recta  $r$ . Apresente o resultado em segundos, arredondado às décimas.

7. Considere a função  $f$  definida no intervalo  $[1, 2]$  por  $f(x) = \cos(x - 1) + \ln x$  ( $\ln$  designa logaritmo de base  $e$ ).

Para um certo valor real positivo  $a$  e para um certo valor real  $b$ , a função  $g$ , definida no intervalo  $[1, 2]$  por  $g(x) = a \cdot f(x) + b$ , tem por contradomínio o intervalo  $[4, 5]$ .

Utilizando as capacidades gráficas da sua calculadora, determine os valores de  $a$  e de  $b$ , arredondados às centésimas.

Explique como procedeu. Na sua explicação, deve incluir o gráfico, ou gráficos, que tenha visualizado na calculadora, bem como coordenadas relevantes de algum, ou alguns, pontos. Sempre que, em valores intermédios, proceder a arredondamentos, conserve um mínimo de três casas decimais.

**FIM**

## COTAÇÕES

**Grupo I** ..... **63**

Cada resposta certa ..... 9  
Cada resposta errada..... 0  
Cada questão não respondida ou anulada ..... 0

**Grupo II** ..... **137**

**1.** ..... **21**

**1.1.** ..... **10**

**1.2.** ..... **11**

**2.** ..... **20**

**2.1.** ..... **10**

**2.2.** ..... **10**

**3.** ..... **12**

**4.** ..... **28**

**4.1.** ..... **14**

**4.2.** ..... **14**

**5.** ..... **14**

**6.** ..... **28**

**6.1.** ..... **14**

**6.2.** ..... **14**

**7.** ..... **14**

**TOTAL** ..... **200**