

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO
12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais
Programa novo implementado em 2005/2006

Duração da prova: 120 minutos
2006

1.ª FASE

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 2

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implica a anulação de todos os itens de escolha múltipla.

Identifique claramente os grupos e os itens a que responde.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta (excepto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, desenhos ou outras representações).

É interdito o uso de «esferográfica-lápis» e de corrector.

As cotações da prova encontram-se na página 11.

A prova inclui um formulário (pág. 3).

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Polígono regular: $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Sector circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$
(r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$
(r – raio)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Trigonometria

$\text{sen}(a + b) = \text{sen } a \cdot \cos b + \text{sen } b \cdot \cos a$

$\text{cos}(a + b) = \text{cos } a \cdot \cos b - \text{sen } a \cdot \text{sen } b$

$\text{tg}(a + b) = \frac{\text{tg } a + \text{tg } b}{1 - \text{tg } a \cdot \text{tg } b}$

Complexos

$(\rho \text{ cis } \theta)^n = \rho^n \text{ cis } (n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \text{ cis } \theta} = \sqrt[n]{\rho} \text{ cis } \frac{\theta + 2k\pi}{n}$, $k \in \{0, \dots, n-1\}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$ ($n \in \mathbb{R}$)

$(\text{sen } u)' = u' \cdot \text{cos } u$

$(\text{cos } u)' = -u' \cdot \text{sen } u$

$(\text{tg } u)' = \frac{u'}{\text{cos}^2 u}$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

Limites notáveis

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

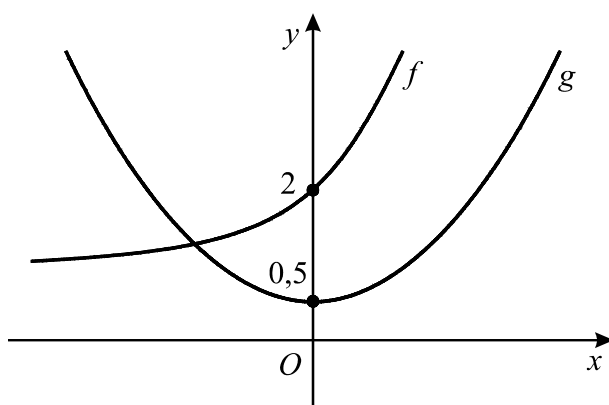
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$ ($p \in \mathbb{R}$)

Grupo I

- Os sete itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada um deles, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma letra, o item será anulado, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações.**

1. Na figura estão representadas, em referencial o.n. xOy , partes dos gráficos de duas funções, f e g , contínuas em \mathbb{R} .
Tal como a figura sugere,
- nenhum dos gráficos intersecta o eixo Ox ;
 - os gráficos de g e de f intersectam o eixo Oy nos pontos de ordenadas 0,5 e 2, respectivamente.



Apenas uma das equações seguintes é impossível. Qual delas?

(A) $f(x) \times g(x) = 1$

(B) $\frac{f(x)}{g(x)} = 1$

(C) $f(x) - g(x) = 0$

(D) $f(x) + g(x) = 0$

2. Seja h a função, de domínio \mathbb{R} , definida por

$$h(x) = \frac{\ln(\sqrt{e^x})}{2} \quad (\ln \text{ designa logaritmo de base } e)$$

Qual das seguintes expressões pode também definir h ?

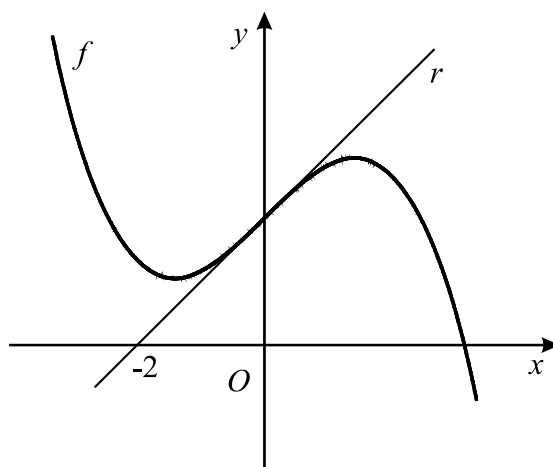
- (A) $\frac{x}{4}$ (B) $\frac{x}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{x}}{2}$ (D) \sqrt{x}
3. Seja g a função definida em \mathbb{R} por $g(x) = \frac{e^x + 5}{2 + \cos x}$

Considere a sucessão de termo geral $u_n = \frac{n+1}{n^2}$

Indique o valor de $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(u_n)$

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
4. Na figura está representada parte do gráfico de uma função polinomial f .

Tal como a figura sugere, o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, 0[$ e voltada para baixo em $[0, +\infty[$.



A recta r , tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 0, é paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares e intersecta o eixo Ox no ponto de abcissa -2 .

Sabendo que f' e f'' designam, respectivamente, a primeira e a segunda derivadas de f , indique o valor de $f(0) + f'(0) + f''(0)$

- (A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1

5. Uma variável aleatória X tem a seguinte distribuição de probabilidades:

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$\frac{{}^{2005}C_{99}}{{}^{2006}C_{100}}$	$\frac{a}{{}^{2006}C_{100}}$

Indique o valor de a .

- (A) ${}^{2005}C_{99}$ (B) ${}^{2005}C_{100}$ (C) ${}^{2006}C_{99}$ (D) ${}^{2006}C_{100}$

6. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

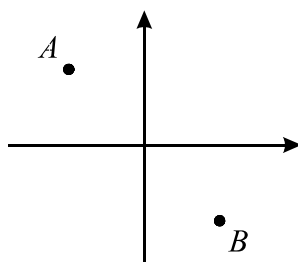
Sabe-se que $P(A) = 0,3$

Apenas um dos acontecimentos seguintes pode ter probabilidade inferior a $0,3$.

Qual deles?

- (A) $A \cap B$ (B) $\bar{A} \cup B$ (C) $A \cup B$ (D) $\overline{A \cap B}$

7. Os pontos A e B , representados na figura, são as imagens geométricas, no plano complexo, das raízes quadradas de um certo número complexo z .



Qual dos números complexos seguintes pode ser z ?

- (A) i (B) $-i$ (C) 1 (D) -1

Grupo II

Nos itens deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Seja \mathbb{C} o conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária.

1.1. Sem recorrer à calculadora, determine $\frac{4 + 2i \left(\operatorname{cis} \frac{\pi}{6}\right)^6}{3 + i}$ apresentando o resultado final na forma trigonométrica.

1.2. Considere que, para qualquer número complexo z não nulo, $\arg(z)$ designa o argumento de z que pertence ao intervalo $[0, 2\pi[$.

Represente a região do plano complexo definida pela condição, em \mathbb{C} ,

$$\frac{1}{2} \leq |z| \leq 1 \quad \wedge \quad \frac{3\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \frac{5\pi}{4}$$

e determine a sua **área**.

2.

2.1. Uma coluna com a forma de um prisma hexagonal regular está assente no chão de um jardim. Dispomos de seis cores (amarelo, branco, castanho, dourado, encarnado e verde) para pintar as sete faces visíveis (as seis faces laterais e a base superior) desse prisma.

Admita que se pintam de verde duas faces laterais opostas.

Determine de quantas maneiras diferentes podem ficar pintadas as restantes **cinco** faces, de tal modo

- que duas faces que tenham uma aresta comum fiquem pintadas com cores diferentes
- e que duas faces laterais que sejam opostas fiquem pintadas com a mesma cor.

2.2. Considere um prisma hexagonal regular num referencial o.n. $Oxyz$, de tal forma que uma das suas bases está contida no plano de equação $z = 2$.

Escolhendo ao acaso dois vértices do prisma, qual é a probabilidade de eles definirem uma recta paralela ao eixo Oz ? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

3. De uma caixa com dez bolas brancas e algumas bolas pretas, extraem-se sucessivamente, e ao acaso, duas bolas, não repondo a primeira bola extraída, antes de retirar a segunda. Considere os acontecimentos:

A : «a primeira bola extraída é preta»;

B : «a segunda bola extraída é branca».

Sabe-se que $P(B|A) = \frac{1}{2}$ ($P(B|A)$ designa probabilidade de B , se A)

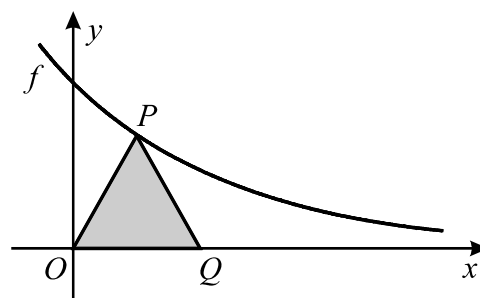
Quantas bolas pretas estão inicialmente na caixa? Numa pequena composição, justifique a sua resposta, começando por explicar o significado de $P(B|A)$, no contexto da situação descrita.

4. Na figura estão representados:

- parte do gráfico da função f , de domínio \mathbb{R} , definida por $f(x) = e^{-x}$

- um triângulo **isósceles** $[OPQ]$ ($\overline{PO} = \overline{PQ}$), em que:

- O é a origem do referencial;
- P é um ponto do gráfico de f ;
- Q pertence ao eixo das abcissas.



Considere que o ponto P se desloca no primeiro quadrante (eixos não incluídos), ao longo do gráfico de f .

O ponto Q acompanha o movimento do ponto P , deslocando-se ao longo do eixo das abcissas, de tal modo que \overline{PO} permanece sempre igual a \overline{PQ} .

Seja A a função, de domínio \mathbb{R}^+ , que faz corresponder, à abscissa x do ponto P , a área do triângulo $[OPQ]$.

4.1. Mostre que, para cada $x \in \mathbb{R}^+$, se tem $A(x) = x e^{-x}$

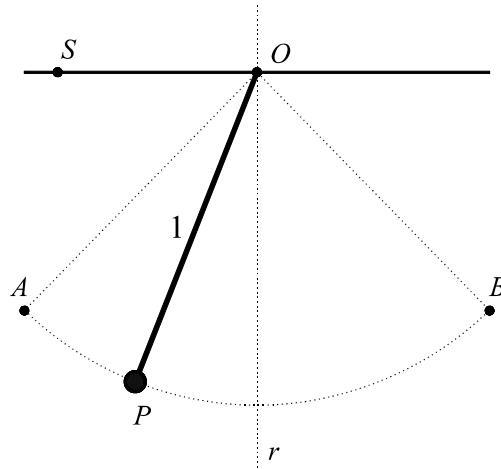
4.2. **Sem recorrer à calculadora**, estude a função A quanto à monotonia e conclua qual é o valor máximo que a área do triângulo $[OPQ]$ pode assumir.

5. De uma certa função f , de domínio \mathbb{R} , sabe-se que:

- f é contínua;
- a recta de equação $y = x$ é assíntota do gráfico de f , quer quando $x \rightarrow +\infty$, quer quando $x \rightarrow -\infty$.

Mostre que o gráfico da função g , definida, em \mathbb{R} , por $g(x) = x f(x)$, não tem qualquer assíntota.

6. Na figura está representada uma esfera suspensa de um fio com 1 metro de comprimento, fixo no ponto O .



O centro da esfera oscila entre os pontos A e B , que são simétricos relativamente à recta vertical r .

A recta r passa pelo ponto O e é perpendicular à recta OS .

No instante inicial, o centro da esfera coincide com o ponto A .

Admita que, t segundos após esse instante inicial, o centro da esfera está num ponto P tal que a amplitude, em radianos, do ângulo SOP é dada (aproximadamente) por

$$\alpha(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \cos(\sqrt{9,8} t)$$

Nas duas alíneas seguintes, **não utilize a calculadora**, a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos.

- 6.1. Determine a distância do centro da esfera à recta OS , no instante inicial.
- 6.2. Determine o instante em que o centro da esfera passa pela primeira vez na recta r . Apresente o resultado em segundos, arredondado às décimas.

7. Considere a função f definida no intervalo $[1, 2]$ por $f(x) = \cos(x - 1) + \ln x$ (\ln designa logaritmo de base e).

Para um certo valor real positivo a e para um certo valor real b , a função g , definida no intervalo $[1, 2]$ por $g(x) = a \cdot f(x) + b$, tem por contradomínio o intervalo $[4, 5]$.

Utilizando as capacidades gráficas da sua calculadora, determine os valores de a e de b , arredondados às centésimas.

Explique como procedeu. Na sua explicação, deve incluir o gráfico, ou gráficos, que tenha visualizado na calculadora, bem como coordenadas relevantes de algum, ou alguns, pontos. Sempre que, em valores intermédios, proceder a arredondamentos, conserve um mínimo de três casas decimais.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I 63

Cada resposta certa 9
Cada resposta errada..... 0
Cada questão não respondida ou anulada 0

Grupo II 137

1. 21
 1.1. 10
 1.2. 11

2. 20
 2.1. 10
 2.2. 10

3. 12

4. 28
 4.1. 14
 4.2. 14

5. 14

6. 28
 6.1. 14
 6.2. 14

7. 14

TOTAL 200