EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos
2001

1.ª FASE
2.ª CHAMADA
VERSÃO 1

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de todo o GRUPO I.

V.S.F.F.

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

- O Grupo I inclui sete questões de escolha múltipla.
- O Grupo II inclui cinco questões de resposta aberta, algumas delas subdivididas em alíneas, num total de dez.

Na página 11 deste enunciado encontra-se um formulário que, para mais fácil utilização, pode ser destacado do resto da prova, em conjunto com esta folha.

Grupo I

- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$h(x) = \begin{cases} 1+e^x & se\ x<0 \\ 2 & se\ x=0 \\ 3x+2 & se\ x>0 \end{cases}$$

Relativamente à continuidade da função h, no ponto 0, qual das afirmações seguintes é verdadeira ?

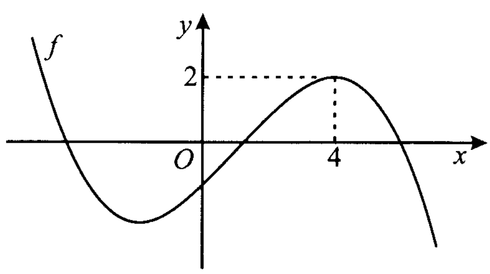
(A) É contínua
(B) É contínua à esquerda e descontínua à direita
(C) É contínua à direita e descontínua à esquerda
(D) É descontínua à esquerda e à direita

2. Na figura está representada parte do gráfico de uma função f, polinomial do terceiro grau.

2 é um máximo relativo da função f.

Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = f(x) - 2$

Quantos são os zeros da função g?

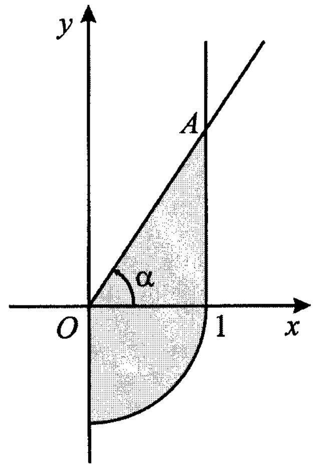


(A) um **(B)** dois **(C)** três **(D)** quatro

V.S.F.F.

3. Na figura estão representados, em referencial o.n. xOy :

- um quarto de círculo, de centro na origem e raio 1
- uma semi-recta paralela ao eixo Oy, com origem no ponto $(1, 0)$
- um ponto A pertencente a esta semi-recta
- um ângulo de amplitude α, cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e cujo lado extremidade é a semi-recta $\dot{O}A$



Qual das expressões seguintes dá a área da região sombreada, em função de α?

(A) $\frac{\pi}{4} + \frac{\text{tg}\ \alpha}{2}$

(B) $\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\text{tg}\ \alpha}$

(C) $\pi + \frac{\text{tg}\ \alpha}{2}$

(D) $\pi + \frac{2}{\text{tg}\ \alpha}$

4. Considere as funções f e g, de domínio $\mathbb{R}$, definidas por

$$f(x) = 2^x \qquad \text{e} \qquad g(x) = 3^x$$

Qual é o conjunto solução da inequação $f(x) > g(x)$?

(A) Conjunto vazio **(B)** $\mathbb{R}^-$ **(C)** $\mathbb{R}^+$ **(D)** $\mathbb{R}$

5. Num curso superior existem dez disciplinas de índole literária, das quais três são de literatura contemporânea.

Um estudante pretende inscrever-se em seis disciplinas desse curso.

Quantas escolhas pode ele fazer se tiver de se inscrever em, pelo menos, duas disciplinas de literatura contemporânea?

(A) ${}^3C_2 + {}^7C_4 \times {}^7C_3$

(B) ${}^3C_2 + {}^7C_4 + {}^7C_3$

(C) ${}^3C_2 \times {}^7C_4 \times {}^7C_3$

(D) ${}^3C_2 \times {}^7C_4 + {}^7C_3$

6. Seja E o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset E$ e $B \subset E$).

Tem-se que:

$P(A \cap B) = 10\%$

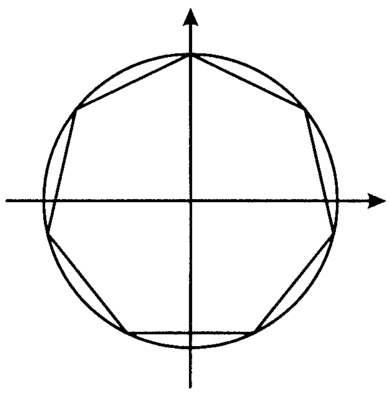
$P(A) = 60\%$

$P(A \cup B) = 80\%$

Qual é o valor da probabilidade condicionada $P(A|B)$?

(A) $\frac{1}{5}$ **(B)** $\frac{1}{4}$ **(C)** $\frac{1}{3}$ **(D)** $\frac{1}{2}$

7. Na figura está representado, no plano complexo, um heptágono regular inscrito numa circunferência de centro na origem e raio 1. Um dos vértices do heptágono pertence ao eixo imaginário.



Os vértices do heptágono são, para um certo número natural n, as imagens geométricas das raízes de índice n de um número complexo z.

Qual é o valor de z ?

(A) $1+i$ **(B)** $1-i$ **(C)** i **(D)** $-i$

V.S.F.F.

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja

$z_1 = 4i$ (i designa a unidade imaginária).

1.1. No plano complexo, a imagem geométrica de z_1 é um dos quatro vértices de um losango de perímetro 20, centrado na origem do referencial. Determine os números complexos cujas imagens geométricas são os restantes vértices do losango.

1.2. Sem recorrer à calculadora, resolva a equação $\left(\sqrt{2}\, cis\, \frac{\pi}{4}\right)^2 . z = 2 + z_1$

Apresente o resultado na forma algébrica.

2. Considere que a altura A (em metros) de uma criança do sexo masculino pode ser expressa, aproximadamente, em função do seu peso p (em quilogramas), por

$A(p) = -0{,}52 + 0{,}55 \ln(p)$ ($\ln$ designa logaritmo de base e)

Recorrendo a métodos analíticos e utilizando a calculadora para efectuar cálculos numéricos, resolva as duas alíneas seguintes.

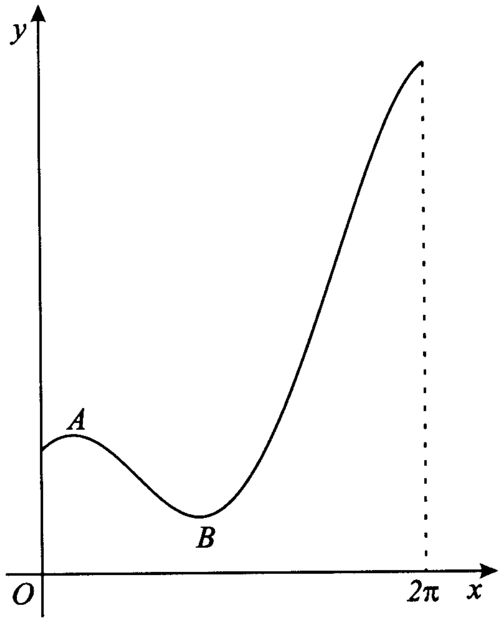
2.1. O Ricardo tem $1{,}4$ m de altura. Admitindo que a altura e o peso do Ricardo estão de acordo com a igualdade referida, qual será o seu peso?

Apresente o resultado em quilogramas, arredondado às unidades.

Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

2.2. Verifique que, para qualquer valor de p, a diferença $A(2p) - A(p)$ é constante. Determine um valor aproximado dessa constante (com duas casas decimais) e interprete esse valor, no contexto da situação descrita.

3. Na figura está representado o gráfico da função f, de domínio $[0, 2\pi]$, definida por $f(x) = x + 2\cos x$



A e B são pontos do gráfico cujas ordenadas são extremos relativos de f

3.1. Sem recorrer à calculadora, resolva as duas alíneas seguintes.

3.1.1. Mostre que a ordenada do ponto A é $\dfrac{\pi + 6\sqrt{3}}{6}$ e que a do ponto B é $\dfrac{5\pi - 6\sqrt{3}}{6}$

3.1.2. Qual é o contradomínio de f ?

3.2. Considere a recta tangente ao gráfico de f no ponto A.
Esta recta intersecta o gráfico num outro ponto C.
Recorrendo à calculadora, determine um valor aproximado para a abcissa do ponto C (apresente o resultado arredondado às décimas).
Explique como procedeu (na sua explicação, deve incluir o gráfico, ou gráficos, que considerou para resolver esta questão).

4. De uma função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, sabe-se que a bissectriz dos quadrantes ímpares é uma assimptota do seu gráfico.

Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $h(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$

Prove que o eixo Ox é uma assimptota do gráfico de h.

5. Três casais, os Nunes, os Martins e os Santos, vão ao cinema.

5.1. Ficou decidido que uma mulher, escolhida ao acaso de entre as três mulheres, paga três bilhetes, e que um homem, escolhido igualmente ao acaso de entre os três homens, paga outros três bilhetes.

Qual é a probabilidade de o casal Nunes pagar os seis bilhetes? Apresente o resultado na forma de fracção.

5.2. Considere o seguinte problema:

Depois de terem comprado os bilhetes, todos para a mesma fila e em lugares consecutivos, as seis pessoas distribuem-nos ao acaso entre si. Supondo que cada pessoa se senta no lugar correspondente ao bilhete que lhe saiu, qual é a probabilidade de os membros de cada casal ficarem juntos, com o casal Martins no meio?

Numa pequena composição, com cerca de quinze linhas, explique por que razão $\dfrac{2^4}{6!}$ é uma resposta correcta a este problema.

Deve organizar a sua composição de acordo com os seguintes tópicos:

• referência à Regra de Laplace;

• explicação do número de casos possíveis;

• explicação do número de casos favoráveis.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa .... +9
Cada resposta errada.. - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota:
Um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II **137**

1. 21
- **1.1.** 10
- **1.2.** 11

2. 28
- **2.1.** 14
- **2.2.** 14

3. 41
- **3.1.** 28
  - **3.1.1.** 14
  - **3.1.2.** 14
- **3.2.** 13

4. 15

5. 32
- **5.1.** 14
- **5.2.** 18

TOTAL **200**

V.S.F.F.

Formulário

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\,maior \times Diagonal\,menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\,maior + Base\,menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Círculo: $\pi\, r^2$ $(r - raio)$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
$(r - \textit{raio da base};\ g - \textit{geratriz})$

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
$(r - raio)$

Volumes

Prisma: *Área da base* $\times$ *Altura*

Cilindro: *Área da base* $\times$ *Altura*

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ $(r - raio)$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \,.\, \cos b + \operatorname{sen} b \,.\, \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \,.\, \cos b - \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho\, cis\, \theta)\,.\,(\rho'\, cis\, \theta') = \rho\,\rho'\, cis\,(\theta + \theta')$

$\frac{\rho\, cis\, \theta}{\rho'\, cis\, \theta'} = \frac{\rho}{\rho'}\, cis\,(\theta - \theta')$

$(\rho\, cis\, \theta)^n = \rho^n\, cis\,(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\, \theta} = \sqrt[n]{\rho}\; cis\, \frac{\theta + 2\,k\,\pi}{n}\ ,\ k \in \{0, ..., n-1\}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.\, v + u\,.\, v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.\, v - u\,.\, v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.\, u^{n-1}\,.\, u'$ $\quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u'.\cos u$

$(\cos u)' = -\, u'.\operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.\, e^u$

$(a^u)' = u'.\, a^u.\ln a$ $\quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\ln a}$ $\quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$ $\quad (p \in \mathbb{R})$