

Exame Final Nacional de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

Prova 835 | Época Especial | Ensino Secundário | 2020

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

16 Páginas

A prova inclui 3 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final (itens **1.**, **6.** e **8.1.**). Dos restantes 11 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente, consoante a situação, todos os elementos relevantes visualizados na sua utilização, como:

- os gráficos obtidos, com os pontos relevantes assinalados (por exemplo, pontos de intersecção de gráficos, pontos de máximos e pontos de mínimos);
- as linhas relevantes da tabela obtida para a resolução;
- as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).

Página em branco



ColorADD

Sistema de Identificação de Cores

CORES PRIMÁRIAS | BRANCO E PRETO

Diagram showing primary colors (AZUL, AMARELO, VERMELHO) and white/black (BRANCO, PRETO) with mixing formulas. The formulas show how primary colors combine to form secondary colors (e.g., AZUL + AMARELO = VERDE) and how primary colors and white/black combine to form various shades.

Diagram showing secondary colors: AZUL, VERDE, AMARELO, LARANJA, VERMELHO, ROXO, CASTANHO.

Diagram showing grayscale and metallic tones: BRANCO, PRETO, CINZA CLARO, CINZA ESC., DOURADO, PRATEADO.

Diagram showing light tones (TONS CLAROS) represented by various shades of gray and color swatches.

Diagram showing dark tones (TONS ESCUROS) represented by various shades of gray and color swatches.

Formulário

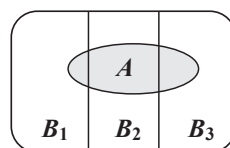
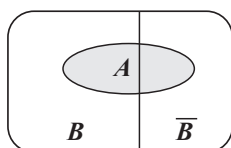
Modelos de grafos

Condição necessária e suficiente para que um grafo conexo admita circuitos de Euler

Um grafo conexo admite circuitos de Euler se e só se todos os seus vértices forem de grau par.

Modelos de probabilidade

Teorema da probabilidade total e regra de Bayes



$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = \\ = P(B) \times P(A | B) + P(\bar{B}) \times P(A | \bar{B})$$

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \\ = \frac{P(B) \times P(A | B)}{P(B) \times P(A | B) + P(\bar{B}) \times P(A | \bar{B})}$$

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) = \\ = P(B_1) \times P(A | B_1) + P(B_2) \times P(A | B_2) + P(B_3) \times P(A | B_3)$$

$$P(B_k | A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} = \\ = \frac{P(B_k) \times P(A | B_k)}{P(B_1) \times P(A | B_1) + P(B_2) \times P(A | B_2) + P(B_3) \times P(A | B_3)}$$

podendo k tomar os valores 1, 2 ou 3

Modelo normal

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$$

Intervalos de confiança

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável aleatória normal X , admitindo que se conhece o desvio padrão da variável

$$\left] \bar{x} - z \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right[$$

n – dimensão da amostra
 \bar{x} – média amostral
 σ – desvio padrão da variável
 z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável aleatória X , admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left] \bar{x} - z \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z \frac{s}{\sqrt{n}} \right[$$

n – dimensão da amostra
 \bar{x} – média amostral
 s – desvio padrão amostral
 z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para uma proporção p , admitindo que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left] \hat{p} - z \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right[$$

n – dimensão da amostra
 \hat{p} – proporção amostral
 z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

(*) Valores de z para os níveis de confiança mais usuais

Nível de confiança	90%	95%	99%
z	1,645	1,960	2,576

1. Na eleição da direção da Associação Ambientalista de Avelares (AAA), constituída por 7 elementos, concorreram as listas X, Y e Z.

Na Tabela 1, está registado o número de votos, validamente expressos, obtidos por cada uma das listas.

Tabela 1

Lista	X	Y	Z
N.º de votos	142	231	425

Para converter os votos nos sete mandatos, aplicou-se o método que a seguir se descreve.

- Divide-se o número de votos de cada lista concorrente, sucessivamente, por 1, 3, 5, 7, 9, etc.
- Ordenam-se os quocientes obtidos, arredondados às unidades, por ordem decrescente, numa série de tantos termos quantos os mandatos previstos.
- Atribuem-se os mandatos às listas a que correspondem os termos da série estabelecida pela regra anterior, recebendo cada uma das listas tantos mandatos quantos os seus termos na série.
- No caso de ficar somente um mandato por atribuir e de os termos seguintes da série serem iguais e correspondentes a listas diferentes, o mandato é atribuído à lista que tiver menor número de votos.

Determine a constituição da direção da AAA, referindo quantos elementos de cada lista a compõem.

2. A Paula, o Rui e o Xavier participaram no projeto de limpeza do parque municipal de Avelares, promovido pela câmara municipal. A limpeza do parque requer semanalmente 36 horas de trabalho. Cada um dos três amigos ficou responsável por uma fração do parque que corresponde a um terço do número de horas necessárias para a sua limpeza.

Na Figura 1, está representado um esquema do parque municipal, dividido nas zonas A e B.

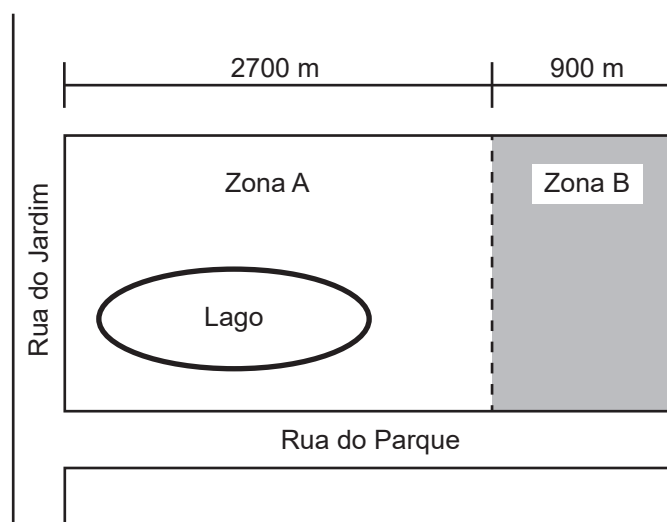


Figura 1

O esquema do parque foi dividido em três frações retangulares, através de duas linhas perpendiculares à Rua do Parque. A Paula ficou responsável pela limpeza da fração delimitada pela Rua do Jardim e por uma das linhas marcadas, o Rui ficou responsável pela fração delimitada pelas duas linhas marcadas e o Xavier ficou com a fração restante.

Por diversos fatores, o número de horas necessário para a limpeza semanal da zona B do parque é o triplo do número de horas necessárias para a limpeza da zona A.

Determine o comprimento do lado de cada uma das frações retangulares atribuídas a cada um dos amigos.

3. Desde que a Associação Ambientalista de Avelares (AAA) começou a fazer a manutenção do lago do parque municipal de Avelares, a qualidade da água melhorou. Com a diminuição do número de um certo tipo de micro-organismos, o número de peixes no lago começou a aumentar.

Admita que, ao fim de t dias após a AAA começar a fazer a manutenção do lago, o número desses micro-organismos por cada 100 ml de água do lago e o número de peixes existentes no lago, em milhares, são dados, respetivamente, por

$$c(t) = 1200e^{-0,25t} \text{ e por } p(t) = \frac{5}{1 + e^{-0,21t}} \quad t \geq 0$$

- 3.1. A qualidade da água do lago é considerada boa se o número desses micro-organismos por cada 100 ml for igual ou inferior a 99.

Prove que, no instante em que a qualidade da água é considerada boa pela primeira vez, o número de peixes existentes no lago é superior a 4400.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve duas casas decimais.

- 3.2. Com o passar do tempo, o número de peixes no lago tende a estabilizar num certo valor. A AAA decidiu que, quando o número de peixes do lago for igual a esse valor menos 400, se pode introduzir uma nova espécie de peixes no lago.

Determine ao fim de quantos dias, após a manutenção do lago passar a ser feita pela AAA, se pode fazer a introdução de novos peixes.

Para responder a esta questão, recorra às capacidades gráficas da sua calculadora e apresente:

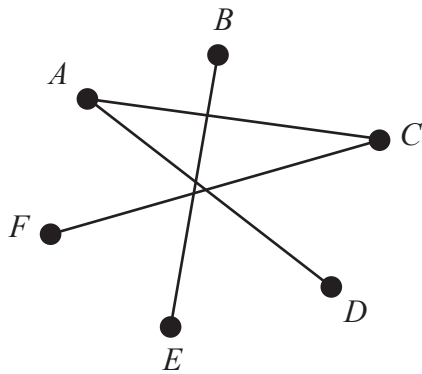
- o(s) gráfico(s) que lhe permitem resolver o problema;
- as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s), com arredondamento às centésimas.

4. Em cada uma das opções, A, B, C e D, apresenta-se um esquema, sob a forma de grafo, que representa um jardim. Em cada grafo, os vértices representam canteiros, e as arestas representam os caminhos existentes entre eles.

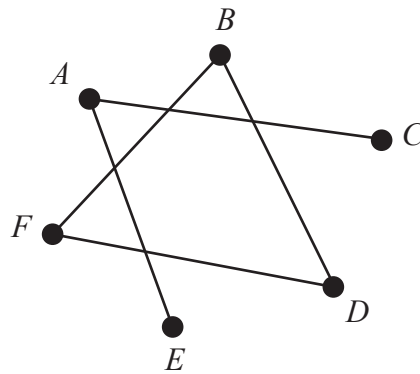
No jardim onde o Rui trabalha, foi construído um novo caminho entre dois canteiros que ainda não estavam ligados. Graças a este novo caminho, é agora possível iniciar e terminar um percurso num mesmo canteiro, percorrendo todos os caminhos, incluindo o novo, sem repetir nenhum deles.

Qual das opções representa o jardim onde trabalha o Rui, antes da construção do novo caminho?

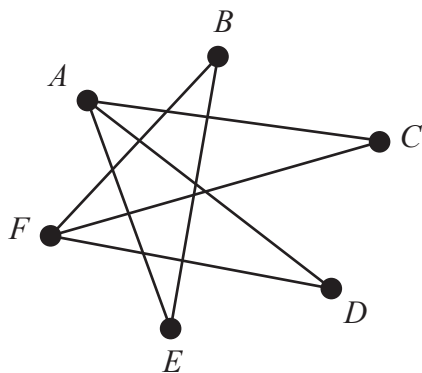
(A)



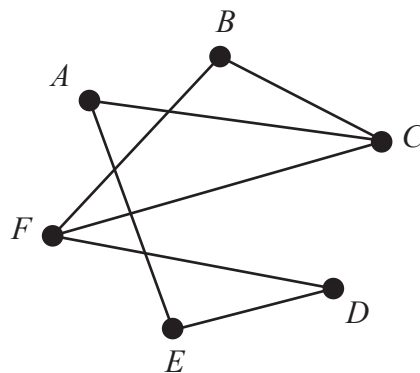
(B)



(C)



(D)



5. No parque municipal de Avelares, vão ser instalados oito bebedouros em locais previamente selecionados, designados por A, B, C, D, E, F, G e H, que serão interligados através de uma canalização.

Na Tabela 2, apresenta-se o comprimento, em metros, das ligações que é possível estabelecer entre os diversos locais.

Tabela 2

	B	C	D	E	F	G	H
A	500	620	---	840	---	502	---
B		505	---	446	---	800	---
C			1140	850	---	754	---
D				---	976	721	952
E					700	---	---
F						412	1310
G							1360

De modo a minimizar o custo da canalização, construiu-se um grafo, aplicando o método que a seguir se descreve.

- Seleciona-se a ligação de menor comprimento (se houver mais do que uma, escolhe-se ao acaso uma delas).
- Em seguida, seleciona-se, de entre as ligações restantes, a de menor comprimento, desde que esta não leve à formação de um ciclo.
- Termina-se quando todos os locais onde serão instalados bebedouros estiverem ligados.

Determine o comprimento total da canalização.

Na sua resposta, apresente o grafo que resulta da aplicação do método descrito.

6. O programa de aluguer das BEA, bicicletas elétricas de Avelares, permite o aluguer mensal de bicicletas com adesão ao tarifário BÓNUS100+.

As condições do tarifário BÓNUS100+ são as seguintes:

- 5 cêntimos por quilómetro, até aos primeiros 100 quilómetros mensais;
- uma redução de 20% no custo por quilómetro a cada 100 quilómetros, após os primeiros 100 quilómetros.

Por exemplo, se uma BEA for utilizada num mês para percorrer 250 quilómetros, o utilizador paga os primeiros 100 quilómetros a 5 cêntimos por quilómetro, mas os quilómetros percorridos para além dos 100 e não acima dos 200 terão uma redução de 20% no custo por quilómetro. Volta a haver uma nova redução de 20% no custo por quilómetro para os quilómetros percorridos acima dos 200.

O Xavier pondera alugar uma BEA no próximo mês, aderindo ao tarifário BÓNUS100+.

Considere que o Xavier pretende utilizar uma BEA para ir para a escola e voltar durante 22 dias.

Admita que a distância entre a escola e a casa do Xavier é 6,5 quilómetros.

Determine o valor que o Xavier terá de pagar.

Apresente o resultado em euros com arredondamento às centésimas.

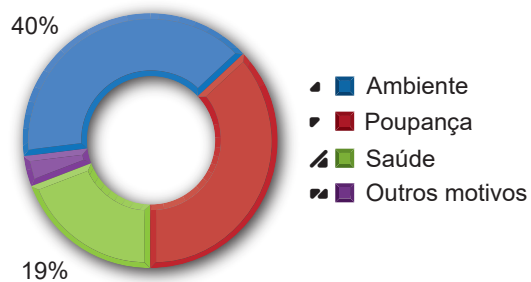
7. Na Escola Secundária de Avelares, os 1500 alunos indicaram o principal motivo pelo qual consideravam importante aderir ao programa de aluguer das BEA, bicicletas elétricas de Avelares.

Os dados recolhidos foram organizados pelos alunos de MACS da escola, tendo-se concluído que:

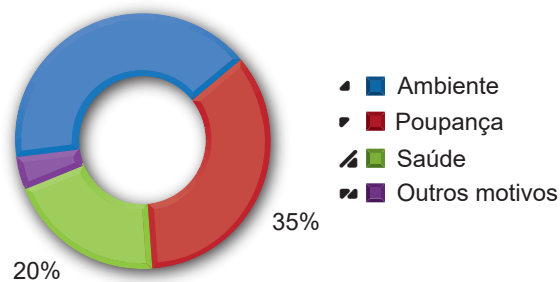
- 645 alunos indicaram ser bom para o ambiente;
- 4% dos alunos indicaram outros motivos.

Qual dos gráficos pode representar a informação recolhida?

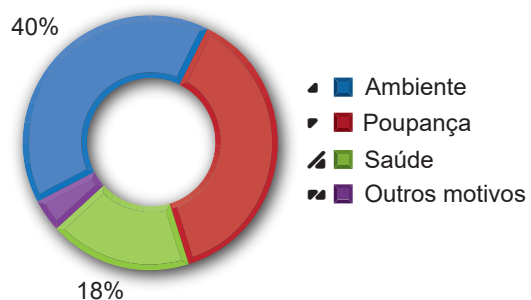
(A)



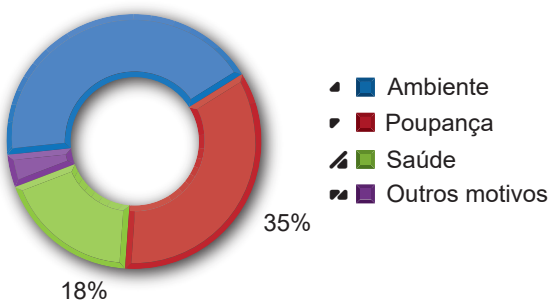
(B)



(C)



(D)



8. Numa turma do 1.º ciclo da Escola Básica de Avelares, os alunos, sempre que depositavam um resíduo no ecoponto amarelo ou no azul, faziam um registo em local próprio.

No final do mês, a professora recolheu os dados e organizou-os.

8.1. No que respeita ao número de resíduos depositados no ecoponto amarelo, a professora organizou os dados relativos aos rapazes numa tabela (Tabela 3) e os dados relativos às raparigas num diagrama de caule e folhas (Gráfico 1).

Tabela 3

N.º de resíduos	Frequência absoluta
5	3
6	4
13	2
16	2

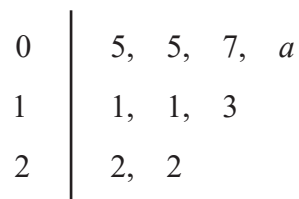


Gráfico 1

No caule do diagrama, apresenta-se o algarismo das dezenas e, nas folhas, o algarismo das unidades.

Admita que a mediana dos dados relativos a todos os alunos da turma é 8.

Determine o valor de a .

8.2. Na Tabela 4, são apresentados os dados referentes ao ecoponto azul.

Tabela 4

N.º de resíduos	Frequência absoluta
1	4
2	5
5	6
9	4
10	1

Na Figura 2, está representado um diagrama de extremos e quartis.

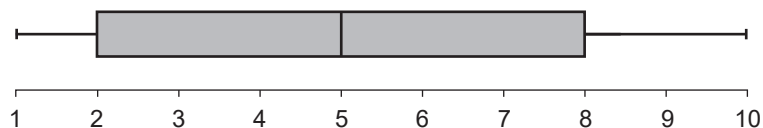


Figura 2

O diagrama representado na Figura 2 não traduz os dados apresentados na Tabela 4.

Justifique esta afirmação.

Na sua resposta:

- indique os valores dos quartis do conjunto dos dados apresentados na Tabela 4;
- apresente o diagrama de extremos e quartis que traduz os dados apresentados na Tabela 4.

9. Os membros da Associação Ambientalista de Avelares (AAA) têm o cuidado de realizar conferências que incentivem à separação de resíduos.

Na última conferência, compareceram vários associados da AAA, dos quais três quartos eram mulheres.

9.1. Admita que compareceram 80 associados (de ambos os sexos) da AAA na última conferência.

Selecionaram-se, ao acaso, sucessivamente, dois associados da AAA presentes na conferência.

Qual é a probabilidade de esses associados serem de sexos diferentes?

(A) $\frac{30}{79}$

(B) $\frac{15}{79}$

(C) $\frac{3}{8}$

(D) $\frac{3}{16}$

9.2. Inquiridos os associados da AAA presentes na conferência, foi possível apurar que:

- dois terços das mulheres separam resíduos;
- metade dos homens separa resíduos.

Escolhe-se ao acaso um dos associados presentes na conferência.

Determine a probabilidade de o associado escolhido ser mulher, sabendo-se que não faz separação de resíduos.

9.3. Uma das razões apontadas por alguns dos associados da AAA, presentes na conferência, para não fazerem a separação de resíduos foi a distância entre os ecopontos e as suas casas.

Admita que a distância, em metros, que esses associados têm de percorrer da sua casa até ao ecoponto mais próximo segue uma distribuição normal, com valor médio de 400 metros e desvio padrão de 30 metros.

Escolhe-se ao acaso um associado que não separa os resíduos.

Determine a probabilidade de esse associado, para ir da sua casa ao ecoponto, ter de percorrer uma distância entre 370 metros e 460 metros.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve cinco casas decimais.

10. A Paula recorre regularmente ao programa de aluguer das BEA, bicicletas elétricas de Avelares.

Na Tabela 5, encontram-se organizados os dados referentes à variável «número de alugueres das BEA efetuados pela Paula, em cada semana», numa amostra aleatória de 36 semanas.

Tabela 5

N.º de alugueres	N.º de semanas
0	5
1	6
3	16
4	9

Com base na informação recolhida, construa um intervalo de confiança a 90% para estimar o valor médio da variável «número de alugueres das BEA efetuados pela Paula, em cada semana».

Apresente os valores do desvio padrão amostral e dos extremos do intervalo de confiança, com arredondamento às décimas.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve quatro casas decimais.

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 3 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	1.			6.				8.1.			Subtotal	
Cotação (em pontos)	20			18				18			56	
Destes 11 itens, contribuem para a classificação final da prova os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	2.	3.1.	3.2.	4.	5.	7.	8.2.	9.1.	9.2.	9.3.	10.	Subtotal
Cotação (em pontos)	8 x 18 pontos											144
TOTAL												200