REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

Prova 835 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2020

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho

Entrelinha 1,5, sem figuras

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 17 Páginas

A prova inclui 3 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final (itens **1.2.**, **3.** e **7.1.**). Dos restantes 11 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de calculadora.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário no final do enunciado da prova.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. O Filipe e nove dos seus amigos decidiram ir juntos a um festival de música.

Como tinham interesse nos festivais A, B e C, decidiram proceder a uma votação para selecionar um deles.

Cada um dos amigos preencheu um boletim de voto, no qual estava representada uma tabela.

Para votar, cada uma das dez pessoas registou uma marca (×) num dos nove espaços por preencher, de acordo com as suas preferências.

Na Figura 1, apresenta-se um exemplo de boletim de voto preenchido.

2.ª preferência 1.ª preferência	A	B	C
A			
B			
C		X	

Figura 1

O exemplo apresentado corresponde ao voto na lista com a ordem de preferências CBA, pois a marca (×) foi colocada num espaço que corresponde ao festival C como primeira preferência e ao festival B como segunda preferência. Por exclusão de partes, a terceira preferência será o festival A.

1.1. Considere os seis boletins de voto apresentados na Figura 2.

2.ª preferência / 1.ª preferência	A	B	C
A		X	
B			
C			

2.ª preferência / 1.ª preferência	A	B	C
A			
B			
C	X		

2.ª preferência / 1.ª preferência	A	B	C
A			X
B			
C			

2.ª preferência / 1.ª preferência	A	B	C
A			X
B			
C			

2.ª preferência / 1.ª preferência	A	B	C
A			X
B			
C			

1.ª preferência \ 2.ª preferência	A	B	C
A		X	
B			
C			

Figura 2

Escolhe-se, ao acaso, um destes seis boletins e a lista de preferências nele registada.

Considere os seguintes acontecimentos, associados a esta experiência aleatória:

Q: «O boletim escolhido corresponde a uma lista em que o festival A ocupa a primeira preferência»

R: «O boletim escolhido corresponde a uma lista em que o festival B ocupa a última preferência»

Qual é o valor da probabilidade condicionada $P(Q \mid R)$?

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{3}{5}$

c) $\frac{3}{4}$

d) $\frac{5}{6}$

Item obrigatório

1.2. Concluída a votação, foi aplicado o método a seguir descrito para obter a decisão final.

- São atribuídos pontos a cada um dos festivais em função do seu lugar na ordem da lista de preferências.
  Cada festival recebe:
  - cinco pontos por cada voto na primeira preferência;
  - três pontos por cada voto na segunda preferência;
  - um ponto por cada voto na terceira preferência.
- Contabiliza-se a pontuação total de cada um dos festivais e o mais pontuado será o escolhido.
- Em caso de empate, o festival será escolhido por sorteio.

A Tabela 1 apresenta as preferências resultantes da votação, sem contemplar o voto do Filipe.

Tabela 1

Preferências	Votos			
	2	2	2	3
1.ª	A	A	C	B
2.ª	B	C	B	C
3.ª	C	B	A	A

Admita que, depois de contabilizado o voto do Filipe, o festival B ficou em primeiro lugar e o C em último, não tendo havido qualquer empate.

Apresente a lista de preferências registada no boletim de voto do Filipe.

Na sua resposta, apresente a pontuação de cada festival, resultante da aplicação do método acima descrito:

- antes de ser contabilizado o voto do Filipe;
- depois de ser contabilizado o voto do Filipe.

2. Dois irmãos, a Elsa e o Manuel, receberam de presente seis bilhetes, B1, B2, B3, B4, B5 e B6, para seis festivais diferentes.

A Elsa valoriza três vezes mais o bilhete B2 do que qualquer um dos outros bilhetes, sendo todos os outros bilhetes valorizados da mesma forma.

Qual das seguintes opções pode representar um conjunto de bilhetes que a Elsa valoriza em 50% do valor global dos bilhetes?

a) B1; B4; B6

b) B2; B3; B5

c) B1; B3; B5; B6

d) B2; B3; B4; B5

<u>Item obrigatório</u>

3. Dois amigos, a Elsa e o Gaspar, partilharam um fogão de campismo (F), uma mesa de campismo (M) e uma tenda (T) durante alguns anos; porém, sendo cada vez mais difícil conciliar a partilha dos bens, decidiram distribuí-los entre os dois.

Como não chegaram a acordo sobre a divisão dos três bens, os amigos resolveram aplicar o método a seguir descrito.

- Cada um dos amigos atribui, secretamente, um certo número de pontos a cada um dos bens, num total de 100 pontos.
- Cada bem é destinado, temporariamente, ao amigo que mais o valoriza.
- Determina-se o total de pontos do(s) bem(ns) temporariamente destinado(s) a cada um dos amigos. Seja A o amigo com o total de pontos mais elevado e seja B o outro amigo.
- Procede-se ao ajuste da partilha, de modo que os dois amigos fiquem com número igual no total de pontos, através da partilha de um dos bens. Os outros bens ficam definitivamente atribuídos a cada um dos amigos.
  - Representa-se o total final de pontos a atribuir ao amigo A pela diferença entre o total temporário dos seus pontos e x por cento dos pontos por ele atribuídos ao bem a partilhar.
  - Representa-se o total final de pontos a atribuir ao amigo B pela soma do total temporário dos seus pontos com x por cento dos pontos por ele atribuídos ao bem a partilhar.
  - Igualam-se os dois totais finais, de modo a determinar o valor de x com o qual a partilha ficará equilibrada.

- O amigo B fica com o(s) bem(ns) a si destinado(s) e x por cento da utilização do bem a partilhar, e o amigo A fica com o restante.

Na Tabela 2, apresenta-se o número de pontos atribuídos aos três bens por cada um dos amigos.

Tabela 2

	F	**M**	**T**
Elsa	19	26	55
Gaspar	35	5	60

Atendendo aos dados apresentados na Tabela 2, os amigos concluíram que o bem a partilhar seria a tenda.

Assim, após a aplicação do método descrito, determinaram o número de dias em que, num ano, cada um deles poderia utilizar a tenda.

Admita que, até agosto, num ano com 365 dias, o Gaspar já tinha utilizado a tenda durante 146 dias.

Será que ainda a poderá utilizar durante os cinco dias do festival de verão a que pretende ir?

Na sua resposta:

– apresente a partilha temporária dos bens pelos dois amigos;

– determine o total de pontos dos bens temporariamente destinados a cada amigo;

– apresente a equação que traduz o equilíbrio da partilha e resolva-a;

– apresente a partilha final dos bens pelos dois amigos;

– determine o número de dias em que o Gaspar pode utilizar a tenda.

4. Num determinado verão, decorreram os festivais F1, F2, F3, F4, F5 e F6. Estes festivais realizaram-se ao fim de semana e tiveram, cada um, a duração de dois dias (sábado e domingo).

Na Tabela 3, apresentam-se os festivais a que quatro jovens assistiram. Cada jovem assistiu, sempre, a ambos os dias de cada um dos festivais.

Tabela 3

Jovens	**Festivais**
Elsa	F1, F2, F3
Filipe	F1, F2, F4
Gaspar	F1, F3, F5
Manuel	F4, F5, F6

Indique o número mínimo de fins de semana em que os festivais podem ter decorrido.

Na sua resposta, identifique os festivais que decorreram em simultâneo.

5. Para pagar as despesas da sua ida a um festival, o Filipe utilizou uma poupança no valor de 240 euros, feita ao longo de 16 meses.

Após um depósito inicial, o Filipe depositou mensalmente uma quantia fixa, que corresponde a uma percentagem do valor depositado inicialmente.

Determine a que percentagem do depósito inicial corresponde a quantia fixa depositada em cada mês, sabendo que o valor final da poupança foi o dobro do depósito inicial.

6. Um balão publicitário foi lançado de uma plataforma.

Admita que, t minutos após ser lançado, a altura do balão, em metros, é bem aproximada pelo modelo seguinte.

$$A(t) = \frac{30}{1 + 29e^{-2t}} \qquad \text{para } t \in [0, 5]$$

6.1. Determine quantos metros subiu o balão no primeiro minuto.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve duas casas decimais.

6.2. Enquanto o balão subia, foram lançados confetes durante algum tempo, tendo esse lançamento terminado quando o balão atingiu os 20 metros de altura.

Determine o instante em que terminou o lançamento dos confetes.

Apresente o resultado, em minutos, arredondado às unidades.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve três casas decimais.

7. A venda de bilhetes para o concerto da banda *BigBand* gerou tanta procura que, na véspera do primeiro dia de venda, se formou fila para a aquisição de bilhetes à porta da bilheteira.

Ao longo do primeiro dia de venda dos bilhetes, as pessoas foram questionadas sobre o número de horas que permaneceram na fila antes da abertura da bilheteira (x) e sobre o tempo, em horas, que decorreu desde a abertura da bilheteira até terem adquirido os bilhetes (y).

A Tabela 4 apresenta as respostas dadas por sete das pessoas questionadas: A, B, C, D, E, F e G.

Tabela 4

Pessoa	x **(horas)**	y **(horas)**
A	30	0,5
B	24	1
C	22,5	2
D	18	4
E	12	8
F	8	9
G	3	12

Item obrigatório

7.1. O Filipe e um amigo chegaram e permaneceram juntos na fila para a aquisição de bilhetes.

O tempo médio de espera das nove pessoas, as sete referidas na Tabela 4 e os dois amigos, até à abertura da bilheteira foi 15,5 horas.

Determine quantas horas o Filipe esperou na fila até à abertura da bilheteira.

7.2. No final do primeiro dia de venda dos bilhetes, foi registado o tempo de espera de cada cliente, em horas, decorrido desde a abertura da bilheteira até ter adquirido os bilhetes, incluindo as pessoas mencionadas na Tabela 4.

A informação recolhida foi organizada num gráfico circular dividido em quatro sectores.

Um sector representa um tempo de espera no intervalo $[0, 3[$, ao qual correspondem 60% dos dados.

Um sector representa um tempo de espera no intervalo $[3, 6[$, ao qual correspondem 16% dos dados.

Um sector representa um tempo de espera no intervalo $[6, 9[$, ao qual correspondem 16% dos dados.

Um sector representa um tempo de espera no intervalo $[9, 12]$, ao qual correspondem 8% dos dados.

Admita que, das pessoas indicadas na Tabela 4, as que esperaram menos de três horas correspondem a 0,4% do número total de pessoas que adquiriram bilhetes nesse intervalo de tempo.

O número total de clientes que, nesse dia, adquiriram bilhete foi:

a) 1250

b) 5

c) 750

d) 50

7.3. Admita que a relação entre as variáveis x e y, da Tabela 4, é bem aproximada por uma regressão linear, na forma $y = ax + b$.

Determine qual poderá ter sido o tempo que decorreu desde a abertura da bilheteira até à aquisição dos bilhetes por parte de uma pessoa que tenha estado seis horas na fila antes da abertura da bilheteira.

Apresente o resultado em horas, arredondado às unidades.

Na sua resposta, apresente a equação da reta de regressão, com os valores de a e de b arredondados com três casas decimais.

8. Foi realizado um estudo estatístico junto do público de um festival.

8.1. Nesse festival, todos os dias, após o último concerto, há um espetáculo de fogo de artifício.

No último dia do festival, verificou-se que:

- 60% do público assistiu ao primeiro concerto do dia;
- 48% do público assistiu ao primeiro concerto do dia e viu o fogo de artifício;
- do público que não assistiu ao primeiro concerto do dia, 30% não viu o fogo de artifício.

Escolheu-se ao acaso uma pessoa que foi ao último dia do festival.

Determine a probabilidade de essa pessoa não ter visto o fogo de artifício.

8.2. Os dados recolhidos permitem concluir que o consumo de bebidas das 60 000 pessoas presentes durante os vários dias desse festival segue uma distribuição aproximadamente normal, de valor médio 1,5 litros e desvio padrão 0,4 litros.

Quantas pessoas será de esperar que, durante o festival, tenham consumido no máximo 0,3 litros de bebida?

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve cinco casas decimais.

9. A organização de um festival disponibiliza quatro zonas para acampar, Z1, Z2, Z3 e Z4. Com o intuito de saber qual a zona mais pretendida, a organização levou a cabo um inquérito a algumas pessoas, selecionadas ao acaso.

Na Tabela 5, está registado o número de pessoas que manifestaram intenção de acampar em cada uma das zonas.

Tabela 5

Zona	**N.º de pessoas**
Z1	125
Z2	250
Z3	150
Z4	100

A amplitude de um intervalo de confiança para a proporção de pessoas que têm intenção de acampar na zona Z1, face ao número total de pessoas que têm intenção de acampar, é 0,05264.

Determine o nível de confiança desse intervalo.

Na sua resposta, apresente o valor da proporção amostral.

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 3 itens contribuem obrigatoriamente para a classificação final da prova

1.2. .... 20 pontos

3. .... 18 pontos

7.1. .... 18 pontos

SUBTOTAL .... **56 pontos**

Dos restantes 11 itens, contribuem para a classificação final da prova os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação (8 x 18 pontos = 144 pontos)

1.1., 2., 4., 5., 6.1., 6.2., 7.2., 7.3., 8.1., 8.2., 9.

TOTAL .... **200 pontos**

Formulário

Modelos de grafos

Condição necessária e suficiente para que um grafo conexo admita circuitos de Euler

Um grafo conexo admite circuitos de Euler se e só se todos os seus vértices forem de grau par.

Probabilidades

Teorema da probabilidade total e regra de Bayes

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) = P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B) \times P(A \mid B)}{P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})}$$

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) =$$

$$= P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)$$

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} = \frac{P(B_k) \times P(A \mid B_k)}{P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)}$$

podendo k tomar os valores $1, 2$ ou 3

Distribuição normal

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$$

Intervalos de confiança

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável normal X, admitindo que se conhece o desvio padrão da variável

$\left]\overline{x} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right[$
n – dimensão da amostra $\overline{x}$ – média amostral σ – desvio padrão da variável z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável X, admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior a 30

$\left]\overline{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}}\right[$
n – dimensão da amostra $\overline{x}$ – média amostral s – desvio padrão amostral z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para uma determinada proporção, admitindo que a amostra tem dimensão superior a 30

$\left]p - z\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}},\quad p + z\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right[$
n – dimensão da amostra p – proporção amostral z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

(*) Valores de z para os níveis de confiança mais usuais

Nível de confiança	z
90%	1,645
95%	1,960
99%	2,576