REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | Época Especial | Ensino Secundário | 2020

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho | Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 8 Páginas

A prova inclui 4 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final (itens **1.1.**, **1.2.**, **8.1.** e **8.2.**). Dos restantes 14 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

Complexos

$(\rho\, e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho\, e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\; e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ $\quad (k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\, e^u$

$(a^u)' = u'\, a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

1. Na Figura 1, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um cubo $[ABCDEFGH]$ em que cada aresta é paralela a um dos eixos coordenados.

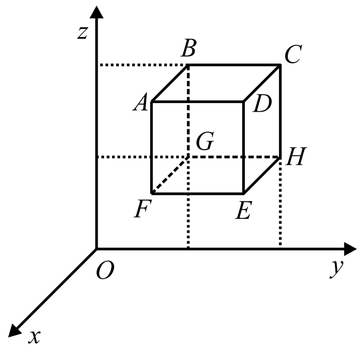

Figura 1

Sabe-se que:

- o vértice B tem coordenadas $(0, 2, 4)$
- o vetor $\overrightarrow{BE}$ tem coordenadas $(2, 2, -2)$
- a aresta $[BG]$ é paralela ao eixo Oz

1.1. Determine a amplitude do ângulo OBE

Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

1.2. Seja α o plano que passa por G e é perpendicular à reta OE

Sejam P, Q e R os pontos de α que pertencem aos eixos coordenados.

Determine o volume da pirâmide $[OPQR]$

2. Na Figura 2, está representado, num referencial o.n. xOy, um hexágono regular $[MNPQRS]$ centrado na origem.

Sabe-se que o vértice M tem coordenadas $(1, 0)$ e que o vértice N pertence ao primeiro quadrante.

Qual é a equação reduzida da reta MN ?

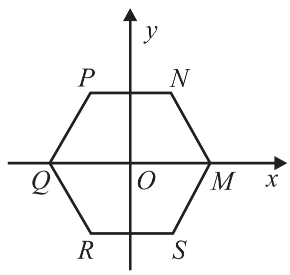

Figura 2

(A) $y = -\sqrt{3}\,x + \sqrt{3}$

(B) $y = -\sqrt{3}\,x + \sqrt{6}$

(C) $y = -x + 2$

(D) $y = -x + 1$

3. Considere um dado cúbico equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6

Lança-se esse dado quatro vezes e escrevem-se, da esquerda para a direita, os algarismos saídos, obtendo-se, assim, um número com quatro algarismos.

Qual é a probabilidade de esse número ser par, menor do que 5000 e capicua (sequência de algarismos cuja leitura da direita para a esquerda ou da esquerda para a direita dá o mesmo número)?

(A) $\frac{1}{36}$ **(B)** $\frac{5}{36}$ **(C)** $\frac{1}{108}$ **(D)** $\frac{5}{108}$

4. Um hotel, que promove atividades ao ar livre, é procurado por turistas de várias nacionalidades.

4.1. Num certo dia, o hotel organizou uma descida do rio Zêzere e uma caminhada na serra da Estrela.

Sabe-se que:

- 80% dos hóspedes participaram na caminhada na serra da Estrela;
- 50% dos hóspedes participaram na descida do rio Zêzere;
- 30% dos hóspedes que participaram na descida do rio Zêzere não participaram na caminhada na serra da Estrela.

Escolhe-se, ao acaso, um dos hóspedes do hotel.

Determine a probabilidade de esse hóspede ter participado na caminhada na serra da Estrela e não ter participado na descida do rio Zêzere.

Apresente o resultado na forma de percentagem.

4.2. Três hóspedes suecos e quatro hóspedes dinamarqueses pretendem visitar os arredores do hotel. Para tal, o hotel disponibiliza quatro motos de dois lugares cada uma (uma preta, uma amarela, uma branca e uma verde).

Sabe-se que apenas os hóspedes dinamarqueses podem conduzir.

De quantas maneiras distintas se podem distribuir, deste modo, os sete hóspedes pelas quatro motos?

(A) 21 **(B)** 35 **(C)** 268 **(D)** 576

5. Considere uma progressão geométrica não monótona (u_n)

Sabe-se que $u_3 = \frac{1}{12}$ e que $u_{18} = 4u_{20}$

Determine uma expressão do termo geral de (u_n)

Apresente essa expressão na forma $a \times b^n$, em que a e b são números reais.

6. Considere a sucessão (v_n) definida, por recorrência, por

$$\begin{cases} v_1 = 2 \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{v_n}, \text{ para qualquer número natural } n \end{cases}$$

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) A sucessão (v_n) é uma progressão aritmética.

(B) A sucessão (v_n) é uma progressão geométrica.

(C) A sucessão (v_n) é monótona.

(D) A sucessão (v_n) é limitada.

7. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere o número complexo $z_1 = -1 - i$

7.1. Determine, sem recorrer à calculadora, os números reais a e b, de forma que z_1 seja solução da equação $\dfrac{a}{z^2} + bz^4 = -2 + i$

7.2. Na Figura 3, está representado, no plano complexo, o triângulo equilátero $[OFG]$

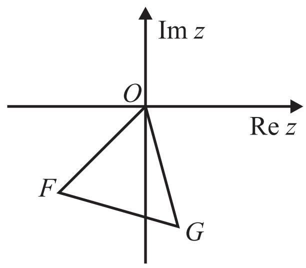

Figura 3

Sabe-se que o ponto F é a imagem geométrica do número complexo z_1 e que o ponto G é a imagem geométrica do número complexo $z_1 \times z_2$ e pertence ao quarto quadrante.

A que é igual o número complexo z_2?

(A) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ **(B)** $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ **(C)** $1 + \sqrt{2}\,i$ **(D)** $1 + \sqrt{3}\,i$

8. Um município construiu, num dos seus parques, uma rampa de *skate* entre duas paredes verticais distanciadas 21 metros uma da outra.

Na Figura 4, estão representados um corte longitudinal da rampa e dois jovens, cada um no seu *skate*.

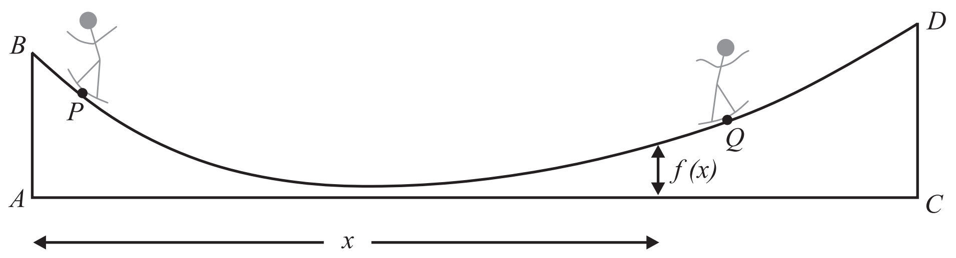

Figura 4

Nesta figura, o arco BD representa a rampa, os segmentos de reta $[AB]$ e $[CD]$ representam as paredes e o segmento de reta $[AC]$ representa o solo. Os pontos P e Q representam as posições dos dois jovens na rampa.

Admita que a distância ao solo, em metros, de um ponto da rampa situado x metros à direita da parede representada na figura por $[AB]$ é dada por

$$f(x) = 0{,}0001x^4 - 0{,}005x^3 + 0{,}11x^2 - x + 3{,}4 \quad , \quad 0 \le x \le 21$$

8.1. Qual é, em metros, com arredondamento às décimas, o valor absoluto da diferença entre as alturas das duas paredes da rampa de *skate*?

(A) $0{,}8$

(B) $0{,}7$

(C) $0{,}5$

(D) $0{,}4$

8.2. Num certo instante, os dois jovens estão à mesma distância do solo, um mais próximo da parede representada por $[AB]$ e o outro mais próximo da parede representada por $[CD]$. O jovem que se encontra mais próximo da parede representada por $[AB]$ está a um metro desta parede.

Seja d a distância a que se encontra da parede representada por $[CD]$ o jovem que dela está mais próximo.

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de d, sabendo-se que esse valor existe e é único.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

– apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;

– reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação e apresente as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às centésimas;

– apresente o valor de d em metros, arredondado às décimas.

Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

9. Seja f a função, de domínio $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, definida por $f(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{\operatorname{tg} x}$

Mostre que o gráfico da função f não tem assíntotas.

10. Para um certo número real k, seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x}{k - kx} & \text{se } x < 1 \\ x^2 - 10 + 8 \ln x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

10.1. Sabe-se que g é contínua no ponto 1

Qual é o valor de k?

(A) $\frac{1}{6}$

(B) $\frac{1}{7}$

(C) $\frac{1}{8}$

(D) $\frac{1}{9}$

10.2. Estude, sem recorrer à calculadora, a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão no intervalo $]1, +\infty[$

Na sua resposta, apresente:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de g tem concavidade voltada para cima;
- a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de g, caso este(s) exista(m).

10.3. Mostre, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, que a função g tem, pelo menos, um zero no intervalo $]\sqrt{e}, e[$

11. Considere a função h, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = \dfrac{5}{4 + 3\cos(2x)}$

11.1. Qual é a taxa média de variação da função h entre $\dfrac{\pi}{6}$ e $\dfrac{7\pi}{6}$?

(A) 1 **(B)** $\dfrac{1}{2}$ **(C)** 0 **(D)** $-\dfrac{1}{2}$

11.2. Determine, sem recorrer à calculadora, as abcissas dos pontos do gráfico da função h, pertencentes ao intervalo $]-\pi, \pi[$, cuja ordenada é 2

FIM

COTAÇÕES

<table>
<tr><td>As pontuações obtidas nas respostas a estes 4 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.</td><td colspan="4">1.1.</td><td colspan="4">1.2.</td><td colspan="3">8.1.</td><td colspan="3">8.2.</td><td>Subtotal</td></tr>
<tr><td>Cotação (em pontos)</td><td colspan="4">16</td><td colspan="4">20</td><td colspan="3">16</td><td colspan="3">20</td><td>72</td></tr>
<tr><td>Destes 14 itens, contribuem para a classificação final da prova os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.</td><td>2.</td><td>3.</td><td>4.1.</td><td>4.2.</td><td>5.</td><td>6.</td><td>7.1.</td><td>7.2.</td><td>9.</td><td>10.1.</td><td>10.2.</td><td>10.3.</td><td>11.1.</td><td>11.2.</td><td>Subtotal</td></tr>
<tr><td>Cotação (em pontos)</td><td colspan="14">8 x 16 pontos</td><td>128</td></tr>
<tr><td colspan="15">TOTAL</td><td>200</td></tr>
</table>