REPÚBLICA PORTUGUESA

EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2020

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho | Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho

Entrelinha 1,5

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 12 Páginas

A prova inclui 4 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final (itens **1.1.**, **1.2.**, **9.1.** e **9.2.**). Dos restantes 14 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

Complexos

$(\rho\, e^{i\theta})^n = \rho^n\, e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho\, e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\; e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}} \quad (k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\; e^u$

$(a^u)' = u'\; a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

1. Na Figura 1, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o cubo $[ABCDEFGH]$ (o ponto H não está representado na figura).

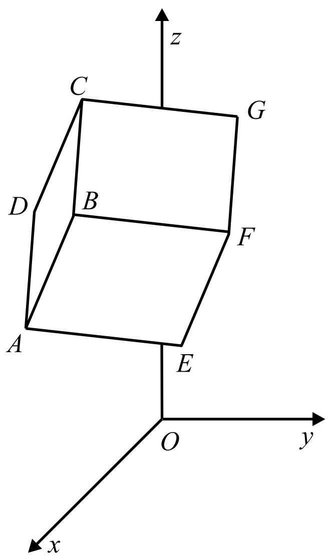

Figura 1

Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(7,1,4)$
- o ponto G tem coordenadas $(5,3,6)$
- a reta AE é definida pela equação vetorial

$$(x, y, z) = (7, 1, 4) + k(3, -6, 2),\ k \in \mathbb{R}$$

Resolva os itens **1.1.** e **1.2.** sem recorrer à calculadora.

1.1. Determine uma equação do plano EFG

Apresente essa equação na forma $ax + by + cz + d = 0$

1.2. Determine a equação reduzida da superfície esférica que passa nos oito vértices do cubo.

2. Considere um cubo $[MNPQRSTU]$

Escolhem-se, ao acaso, três vértices distintos desse cubo.

Qual é a probabilidade de o plano por eles definido conter uma das faces do cubo?

(A) $\frac{1}{7}$

(B) $\frac{3}{7}$

(C) $\frac{1}{8}$

(D) $\frac{3}{8}$

3. Seja E o espaço amostral associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset E$ e $B \subset E)$.

Sabe-se que:

- $P(A) = 0{,}3$; $P(B) = 0{,}4$
- $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0{,}9$

Determine o valor da probabilidade condicionada $P\left(A \mid (A \cup B)\right)$

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

4. Considere todos os números naturais superiores a 9999 e inferiores a $22\,000$

Destes números, quantos se podem escrever com os algarismos 0, 1, 2 e 3 ?

(A) 192

(B) 236

(C) 384

(D) 512

5. Dados dois números reais positivos, sabe-se que a soma dos seus logaritmos na base 8 é igual a $\frac{1}{3}$

A que é igual o produto desses dois números?

(A) 2

(B) 3

(C) 8

(D) 9

6. De uma progressão aritmética (u_n) sabe-se que o sétimo termo é igual ao dobro do segundo e que a soma dos doze primeiros termos é igual a 57

Sabe-se ainda que 500 é termo da sucessão (u_n)

Determine a ordem deste termo.

7. Seja (v_n) a sucessão definida por

$$v_n = \begin{cases} n & \text{se} \quad n < 10 \\ 1 + \dfrac{1}{n} & \text{se} \quad n \geq 10 \end{cases}$$

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) A sucessão (v_n) tem limite nulo.

(B) A sucessão (v_n) é divergente.

(C) A sucessão (v_n) é limitada.

(D) A sucessão (v_n) é monótona.

8. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

8.1. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Seja $z_1 = \dfrac{2}{1-i} + \dfrac{4}{i^5}$ e seja z_2 um número complexo tal que $|z_2| = \sqrt{5}$

Sabe-se que, no plano complexo, o afixo de $z_1 \times z_2$ tem coordenadas positivas e iguais.

Determine z_2

Apresente a resposta na forma $a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$

8.2. Seja k um número real.

Sabe-se que $k + i$ é uma das raízes quadradas do número complexo $3 - 4i$

Qual é o valor de k ?

(A) 2

(B) 1

(C) -1

(D) -2

9. Os satélites artificiais são utilizados para diversos fins e a altitude a que são colocados depende do fim a que se destinam.

Admita que a Terra é uma esfera.

A Figura 2 apresenta um esquema em que se pode observar a superfície terrestre coberta por um satélite, quando este se encontra numa certa posição.

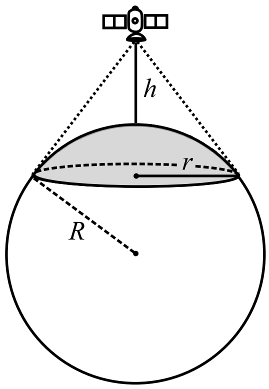

Figura 2

Nesta figura,

- R é o raio, em quilómetros, da Terra;
- h é a altitude, em quilómetros, do satélite $(h > 0)$
- r é o raio, em quilómetros, da base da calote esférica cuja superfície é coberta pelo satélite $(0 < r < R)$
- as grandezas h e r podem relacionar-se por meio da igualdade $r = \dfrac{R}{h+R}\sqrt{h^2 + 2hR}$

Sabe-se que, para cada posição do satélite, a percentagem da área da superfície terrestre coberta pelo satélite é dada por $50\left(1 - \sqrt{1 - \left(\dfrac{r}{R}\right)^2}\right)$

9.1. Qual é a percentagem da área da superfície terrestre coberta por um satélite se o raio da base da calote esférica for igual a $\frac{3}{5}$ do raio da Terra?

(A) 20%

(B) 15%

(C) 10%

(D) 5%

9.2. Considere que o raio da Terra é 6400 km

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, a percentagem da área da superfície terrestre coberta por um satélite se a altitude deste for igual ao raio da base da respetiva calote esférica.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

– apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;

– reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação e apresente as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às centésimas;

– apresente o valor pedido arredondado às unidades.

Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

10. Sejam f e g as funções, de domínio $\mathbb{R}$, definidas, respetivamente, por $f(x) = x^2$ e $g(x) = \cos x$

10.1. Qual é o declive da reta tangente ao gráfico da função $f \circ g$ no ponto de abcissa $\frac{\pi}{4}$?

(A) -2

(B) -1

(C) 1

(D) 2

10.2. Mostre, recorrendo ao teorema de Bolzano-Cauchy, que a equação $f(x) = g(x)$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $\left]0, \frac{\pi}{3}\right[$

11. Seja h a função, de domínio $]-\infty, 4[$, definida por

$$h(x) = \begin{cases} 1 + x\,e^{x-1} & \text{se } \; x \leq 1 \\ \dfrac{\sqrt{x} - 1}{\operatorname{sen}(x-1)} & \text{se } \; 1 < x < 4 \end{cases}$$

Resolva os itens **11.1.** e **11.2.** sem recorrer à calculadora.

11.1. Averigue se a função h é contínua em $x = 1$

11.2. Mostre que o gráfico da função h tem uma assíntota horizontal e apresente uma equação dessa assíntota.

12. Seja f uma função, de domínio $]0, +\infty[$, cuja derivada, f', de domínio $]0, +\infty[$, é dada por

$$f'(x) = \frac{2 + \ln x}{x}$$

12.1. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

Na sua resposta, apresente:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima;
- a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f

12.2. Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{1 - x^2}$?

(A) -2

(B) -1

(C) 0

(D) 2

FIM

COTAÇÕES

<table>
<tr><td>As pontuações obtidas nas respostas a estes 4 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.</td><td colspan="4">1.1.</td><td colspan="4">1.2.</td><td colspan="3">9.1.</td><td colspan="3">9.2.</td><td>Subtotal</td></tr>
<tr><td>Cotação (em pontos)</td><td colspan="4">16</td><td colspan="4">20</td><td colspan="3">16</td><td colspan="3">20</td><td>72</td></tr>
<tr><td>Destes 14 itens, contribuem para a classificação final da prova os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.</td><td>2.</td><td>3.</td><td>4.</td><td>5.</td><td>6.</td><td>7.</td><td>8.1.</td><td>8.2.</td><td>10.1.</td><td>10.2.</td><td>11.1.</td><td>11.2.</td><td>12.1.</td><td>12.2.</td><td>Subtotal</td></tr>
<tr><td>Cotação (em pontos)</td><td colspan="14">8 x 16 pontos</td><td>128</td></tr>
<tr><td colspan="15">TOTAL</td><td>200</td></tr>
</table>