REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2021

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho

Entrelinha 1,5, sem figuras

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 11 Páginas

---

A prova inclui 11 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 7 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 4 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \, \cos b + \operatorname{sen} b \, \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \, \cos b - \operatorname{sen} a \, \operatorname{sen} b$

Complexos

$$\left(\rho\, e^{i\theta}\right)^n = \rho^n\, e^{in\theta}$$

$$\sqrt[n]{\rho\, e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\; e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}} \quad \left(k \in \{0, \ldots, n-1\} \text{ e } n \in \mathbb{N}\right)$$

Regras de derivação

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u'\; e^u$$

$$(a^u)' = u'\; a^u \ln a \quad \left(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}\right)$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad \left(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}\right)$$

Limites notáveis

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$

1. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, um paralelepípedo retângulo $[ABCDEFGH]$ de bases $[ABCD]$ e $[FGHE]$, sendo $[AF]$, $[BG]$, $[CH]$ e $[DE]$ as arestas laterais deste paralelepípedo.

Na base $[ABCD]$, o vértice A pertence ao semieixo positivo Ox, o vértice B pertence ao semieixo positivo Oy, os vértices C e D têm cota positiva, e o segmento de reta $[BD]$ é uma diagonal.

Sabe-se ainda que:

- $E(7, 2, 15)$ e $G(6, 10, 13)$
- a reta EF é definida pela equação $(x, y, z) = (1, -2, 19) + k(-3, -2, 2),\ k \in \mathbb{R}$

Item obrigatório

1.1. Qual das equações seguintes define uma reta perpendicular à reta EF e que passa no ponto E?

(A) $(x, y, z) = (7, -3, 3) + k(2, -3, 0),\ k \in \mathbb{R}$

(B) $(x, y, z) = (7, 2, 15) + k(0, 3, -3),\ k \in \mathbb{R}$

(C) $(x, y, z) = (7, -10, 3) + k(0, 3, 3),\ k \in \mathbb{R}$

(D) $(x, y, z) = (7, 2, 15) + k(2, 0, -3),\ k \in \mathbb{R}$

Item obrigatório

1.2. Determine a equação reduzida da superfície esférica de centro no ponto B e que passa no ponto D

2. Considere, num referencial o.n. xOy, a circunferência de centro em O e raio 3

Considere ainda o triângulo $[ABC]$ em que:

- o segmento de reta $[AB]$ é um diâmetro da circunferência, sendo A um ponto pertencente ao segundo quadrante;
- o ponto C pertence ao semieixo positivo Ox e tem abcissa igual à do ponto B
- α é a inclinação da reta AB $\left(\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[\right)$

Mostre que a área do triângulo $[ABC]$ é dada pela expressão $-9 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$

Item obrigatório

3. Numa escola frequentada por estudantes portugueses e estrangeiros, 60% dos alunos são raparigas e 15% são rapazes estrangeiros.

Escolheu-se, ao acaso, um aluno dessa escola e verificou-se que era um rapaz.

Qual é a probabilidade de ele ser português?

(A) 45%

(B) 50%

(C) $57{,}5\%$

(D) $62{,}5\%$

Item obrigatório

4. O corfebol é um desporto coletivo misto, com origem na Holanda.

Um clube de corfebol de um certo país vai participar num torneio internacional.

A comitiva vai deslocar-se por via terrestre, utilizando um automóvel de cinco lugares e uma carrinha de nove lugares. A comitiva é constituída por três dirigentes, um treinador, cinco jogadores do sexo masculino e cinco do sexo feminino.

Escreva uma expressão que dê o número de maneiras diferentes de distribuir os catorze elementos da comitiva pelos catorze lugares disponíveis, sabendo-se que os dois condutores são dois dos dirigentes e que, no automóvel, vão dois jogadores de cada sexo.

5. Uma turma de 11.º ano é constituída por 30 alunos com idades de 15, 16 e 17 anos, dos quais 60% são raparigas. Sabe-se que um terço dos rapazes tem 17 anos e que um terço das raparigas tem 15 ou 16 anos.

O André e a Beatriz, alunos da turma, são gémeos e têm 16 anos.

Escolhem-se, ao acaso, cinco alunos da turma.

Determine a probabilidade de o grupo constituído por esses cinco alunos ser formado pelo André, pela Beatriz, por dois jovens com 17 anos e por outro com 15 ou 16 anos.

Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às centésimas.

Item obrigatório

6. Seja (v_n) uma progressão geométrica.

Sabe-se que $v_5 = 4$ e que $v_8 = 108$

Qual é o valor de v_6?

(A) 12

(B) 24

(C) 48

(D) 60

7. Seja (u_n) a sucessão definida por $u_n = 2 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

Determine, sem recorrer à calculadora, quantos termos de ordem ímpar da sucessão (u_n) pertencem ao intervalo $\left[\frac{83}{41}, \frac{67}{33}\right]$

<u>Item obrigatório</u>

8. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$ e $z_2 = 2e^{i\frac{3\pi}{28}}$

Seja w o número complexo tal que $w = \frac{z_1}{z_2}$

Sabe-se que, no plano complexo, o afixo do número complexo w é um dos vértices de um polígono regular com centro na origem do referencial e com outro vértice sobre o semieixo real positivo.

Qual é o número mínimo de vértices desse polígono?

(A) 7

(B) 14

(C) 21

(D) 28

9. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = -3 + 2i$, $z_2 = 1 + 2i$ e $z_3 = 2 - i$

Seja w o número complexo tal que $w = \frac{z_1 \times z_2}{z_3}$

Mostre, sem recorrer à calculadora, que a proposição seguinte é verdadeira.

$$|w| = \sqrt{13} \quad \wedge \quad \operatorname{Arg}(w) \in \left]-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}\right[$$

10. Seja f a função, de domínio $]0, +\infty[$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} -x^2(1+2\ln x) & \text{se} \quad 0 < x \leq 1 \\ \dfrac{5-5e^{x-1}}{x^2+3x-4} & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

Resolva os itens **10.1.** e **10.2.** sem recorrer à calculadora.

Item obrigatório

10.1. Averigue se a função f é contínua em $x = 1$

Item obrigatório

10.2. Estude, no intervalo $]0,1[$, a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, e determine, caso existam, esses extremos.

Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia.

11. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Seja g a função, de domínio $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, definida por $g(x) = x\cos x + \operatorname{sen} x$

Mostre, recorrendo ao teorema de Bolzano-Cauchy, que existe pelo menos um ponto pertencente ao gráfico da função g tal que a reta tangente ao gráfico da função nesse ponto tem declive $-\frac{1}{2}$

12. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $h(x) = \dfrac{x^3}{2x^2 - \ln x}$

Estude a função h quanto à existência de assíntota oblíqua ao seu gráfico e, caso esta exista, escreva a sua equação reduzida.

13. Um depósito de forma cilíndrica, instalado na horizontal (ou seja, com as bases contidas em planos verticais), contém uma certa quantidade de combustível, não se encontrando cheio.

Sabe-se que as bases do cilindro têm $1{,}8$ metros de diâmetro.

Num certo instante, iniciou-se o vazamento do depósito.

Seja $a(t)$ a altura, em metros, do combustível no depósito, t minutos após o início do vazamento.

Admita que $a(t) = 1{,}8 - (0{,}216 + 0{,}0039t)^{\frac{2}{3}}$

<u>Item obrigatório</u>

13.1. Qual é, em metros, a diferença entre a altura do combustível no depósito no início do vazamento e a altura do combustível quando este ocupa metade da capacidade do depósito?

(A) $0{,}72$

(B) $0{,}54$

(C) $0{,}36$

(D) $0{,}27$

<u>Item obrigatório</u>

13.2. Decorridos t_1 minutos após o início do vazamento, a altura do combustível no depósito é igual a um certo valor.

Sabe-se que, passado igual período de tempo, a altura do combustível no depósito é igual a metade desse valor.

Escreva uma equação que permita determinar o valor de t_1

Não resolva a equação.

14. Determine, sem recorrer à calculadora, os números reais que são solução da equação

$$\ln\left((1-x)e^{x-1}\right)=x$$

<u>Item obrigatório</u>

15. Considere, para um certo número real positivo k, as funções f e g, de domínio $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, definidas por $f(x)=k\operatorname{sen}(2x)$ e $g(x)=k\cos x$

Sejam, num referencial ortonormado do plano, A, B e C os pontos de intersecção dos gráficos de f e g, sendo A o ponto de menor abcissa e C o ponto de maior abcissa.

Sabe-se que o triângulo $[ABC]$ é retângulo em B

Determine, sem recorrer à calculadora, o valor de k

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 11 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.

1.1.	12 pontos
1.2.	14 pontos
3.	12 pontos
4.	14 pontos
6.	12 pontos
8.	12 pontos
10.1.	14 pontos
10.2.	14 pontos
13.1.	12 pontos
13.2.	14 pontos
15.	14 pontos
SUBTOTAL	**144 pontos**

Destes 7 itens, contribuem para a classificação final da prova os 4 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação (4 × 14 pontos).

2.	14 pontos
5.	14 pontos
7.	14 pontos
9.	14 pontos
11.	14 pontos
12.	14 pontos
14.	14 pontos
SUBTOTAL	**56 pontos**

TOTAL .... **200 pontos**