

**Exame Final Nacional de Matemática A**  
**Prova 635 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2021**

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho

**Entrelinha 1,5, sem figuras**

**Critérios de Classificação**

10 Páginas

---

## **CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO**

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

### **ITENS DE SELEÇÃO**

Nos itens de escolha múltipla, a pontuação só é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a opção correta. Todas as outras respostas são classificadas com zero pontos.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, a transcrição do texto da opção escolhida é considerada equivalente à indicação da letra correspondente.

### **ITENS DE CONSTRUÇÃO**

Nos itens de construção, os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

A classificação das respostas aos itens que envolvam a produção de um texto tem em conta a organização dos conteúdos e a utilização adequada do vocabulário específico da Matemática.

As respostas que não apresentem exatamente os termos ou expressões constantes nos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso obrigatório das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação, num referencial, do gráfico da função ou dos gráficos das funções visualizados.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de construção que envolvam cálculos ou justificações.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelos documentos curriculares de referência da disciplina (ver nota 1). O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplos: «sem recorrer à calculadora», «recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, a pontuação é atribuída de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal, na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).

Situação	Classificação
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade em que, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

**Nota 1** – A título de exemplo, faz-se notar que não são aceites processos de resolução que envolvam a aplicação da regra de Cauchy, da regra de L'Hôpital ou de resultados da teoria de matrizes.

**Nota 2** – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

## CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

1.1. .... 12 pontos  
Opção (C)

1.2. .... 14 pontos

Identificar o vetor  $\overrightarrow{PQ}$  como um vetor normal ao plano pedido ..... 3 pontos

Determinar as coordenadas do vetor  $\overrightarrow{PQ}$  ..... 2 pontos

Escrever  $-3x + 2y - z + d = 0$  ..... 2 pontos

Escrever  $-3 \times 1 + 2 \times (-1) - 2 + d = 0$  ..... 4 pontos

Obter o valor de  $d$  ..... 1 ponto

Escrever uma equação do plano na forma pedida  
( $-3x + 2y - z + 7 = 0$  ou outra equação equivalente) ..... 2 pontos

2. .... 14 pontos

Escrever  $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos \alpha$  ..... 2 pontos

Concluir que  $\cos \alpha = \frac{1}{5}$  ..... 1 ponto

Escrever  $\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$  ..... 2 pontos

Escrever  $\cos\left(-\frac{7\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$  ..... 2 pontos

Obter  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{24}}{5}$  ..... 3 pontos

Obter  $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{24}$  ..... 3 pontos

Apresentar o resultado na forma pedida  $\left(\frac{-7\sqrt{24}}{5}$  ou equivalente) ..... 1 ponto

3.1. .... 12 pontos  
Opção (B)

3.2. .... 14 pontos

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

### 1.º Processo

Designemos por  $M$  o acontecimento «o sócio escolhido é mulher», por  $H$  o acontecimento «o sócio escolhido é homem», por  $B$  o acontecimento «o sócio escolhido pratica badminton» e por  $T$  o acontecimento «o sócio escolhido pratica ténis».

Escrever  $P(M) = 0,65$  ..... 1 ponto

Obter $P(H) = 0,35$ .....	1 ponto
Escrever $P(B H) = \frac{1}{7}$ .....	2 pontos
Obter $P(B \cap H) = 0,05$ .....	2 pontos
Escrever $P(M B) = \frac{5}{6}$ .....	2 pontos
Escrever $P(B) = P(B \cap M) + P(B \cap H)$ .....	1 ponto
Obter $P(B \cap M) = 0,25$ .....	3 pontos
Obter a probabilidade pedida (40%) .....	2 pontos

## 2.º Processo

Designemos por  $a$  a probabilidade de o sócio escolhido praticar badminton.

Construir uma tabela de dupla entrada cujas entradas sejam «é homem, é mulher» e «pratica ténis, pratica badminton» .....	1 ponto
Preencher a célula da tabela relativa à informação «65% dos sócios são mulheres» .....	2 pontos
Obter o valor a colocar na célula da tabela relativa à probabilidade de o sócio ser homem .....	1 ponto
Preencher a célula da tabela relativa à informação « $\frac{1}{7}$ dos homens pratica badminton» .....	2 pontos
Colocar $a$ na célula da tabela relativa à probabilidade de o sócio escolhido praticar badminton .....	1 ponto
Preencher a célula da tabela relativa à informação « $\frac{5}{6}$ dos praticantes de badminton são mulheres» .....	2 pontos
Determinar o valor de $a$ .....	2 pontos
Obter a probabilidade pedida (40%) .....	3 pontos

## 4. .... 14 pontos

Equacionar o problema .....	8 pontos
Escrever ${}^5C_2 \times n$ .....	3 pontos
Escrever ${}^nC_2 \times 5$ .....	3 pontos
Escrever a equação ${}^5C_2 \times n + {}^nC_2 \times 5 = 175$ .....	2 pontos
<b>OU</b>	
Escrever ${}^{n+5}C_3$ .....	3 pontos
Escrever ${}^nC_3 + {}^5C_3$ .....	3 pontos
Escrever a equação ${}^{n+5}C_3 - ({}^nC_3 + {}^5C_3) = 175$ .....	2 pontos
Resolver a equação .....	5 pontos
Apresentar o valor de $n$ (7) (ver nota) .....	1 ponto

**Nota** – Se a etapa anterior tiver sido pontuada com 0 pontos, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

5. .... 12 pontos

Opção (B)

6. .... 14 pontos

Escrever  $\begin{cases} u_6 + u_{20} = -5 \\ u_{19} = 4u_7 \end{cases}$  ..... 2 pontos

Escrever  $\begin{cases} u_1 + 5r + u_1 + 19r = -5 \\ u_1 + 18r = 4(u_1 + 6r) \end{cases}$

(ou um sistema equivalente, nas variáveis  $u_1$  e  $r$ ) ..... 3 pontos

Obter o valor de  $r$  ..... 2 pontos

Obter o valor de  $u_1$  ..... 2 pontos

Escrever  $S_{16} = \frac{u_1 + u_1 + 15r}{2} \times 16$  (ou equivalente) ..... 2 pontos

Obter o valor de  $S_{16}$  ( $-22$ ) ..... 3 pontos

7. .... 12 pontos

Opção (A)

8. .... 14 pontos

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

### 1.º Processo

Seja  $z = x + yi$

Escrever  $(1 + 2i)(x + yi) + (1 - 2i)(x - yi) + 10 = 0$  ..... 2 pontos

Obter  $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$  ..... 5 pontos

Escrever  $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \\ y = -2x \end{cases}$  ..... 3 pontos

Resolver o sistema ..... 3 pontos

Concluir que o número complexo pedido é  $-1 + 2i$  ..... 1 ponto

### 2.º Processo

Seja  $z = x + yi$

Escrever  $(1 + 2i)(x + yi) + (1 - 2i)(x - yi) + 10 = 0$  ..... 2 pontos

Obter  $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$  ..... 5 pontos

Escrever  $z = x + \left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}\right)i$  ..... 2 pontos

- Obter  $|z| = \sqrt{\frac{5x^2 + 10x + 25}{4}}$  ..... 2 pontos
- Determinar a abcissa do vértice da parábola que é o gráfico da função real de variável real definida por  $5x^2 + 10x + 25$  ..... 2 pontos
- Concluir que o número complexo pedido é  $-1 + 2i$  ..... 1 ponto

**9.1. .... 14 pontos**

- Determinar  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  ..... 7 pontos
- Escrever  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - e^{-x}}{x}$  ..... 1 ponto
- Escrever  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - e^{-x}}{x} = 1 - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{x}$  ..... 2 pontos
- Escrever  $1 - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{x} \stackrel{y = -x}{=} 1 + \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y}$  ..... 3 pontos
- Obter  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  ..... 1 ponto
- Determinar  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ..... 5 pontos
- Escrever  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1} - 3 \right)$  ..... 1 ponto
- Escrever  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1} - 3 \right) = -3 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}$  ..... 1 ponto
- Determinar  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}$  ..... 2 pontos
- Obter  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$  ..... 1 ponto
- Concluir que o gráfico de  $f$  não tem qualquer assíntota horizontal quando  $x \rightarrow -\infty$  e que tem uma assíntota horizontal de equação  $y = -2$  quando  $x \rightarrow +\infty$  ..... 2 pontos

**9.2. .... 14 pontos**

- Nota prévia** – Se for utilizada a expressão  $\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1} - 3$ , a classificação máxima a atribuir à resposta é 7 pontos.
- Identificar o declive da reta pedida com  $f'(-2)$  ..... 2 pontos
- Determinar  $f'(-2)$  (**ver nota**) ..... 7 pontos
- Obter uma expressão de  $f'(x)$ , em  $]-\infty, 0[$  ..... 5 pontos
- Obter  $f'(-2)$  ..... 2 pontos
- Calcular  $f(-2)$  ..... 2 pontos
- Obter a equação reduzida da reta pedida  $\left( y = -\frac{e^2}{4}x + 1 \right)$  ..... 3 pontos
- Nota** – Se for evidente a intenção de determinar a expressão da derivada da função, a pontuação mínima a atribuir nesta etapa é 1 ponto.

<b>10.</b> .....	<b>14 pontos</b>
Determinar $h'(x)$ ( <b>ver nota 1</b> ) .....	3 pontos
Escrever $h'(x) = 0$ .....	1 ponto
Determinar os zeros de $h'$ .....	2 pontos
Apresentar um quadro de sinal de $h'$ e de monotonia de $h$ (ou equivalente) ..	4 pontos
Apresentar os intervalos de monotonia da função ( <b>ver nota 2</b> ) .....	1 ponto
Determinar $h(0)$ e $h\left(\frac{\pi}{6}\right)$ $\left(1 \text{ e } \frac{5}{4}\right)$ .....	3 pontos

**Notas:**

1. Se for evidente a intenção de determinar a derivada da função, a pontuação mínima a atribuir nesta etapa é 1 ponto.
2. Se for referido que a função  $h$  é crescente em  $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ , em vez de  $\left[0, \frac{\pi}{6}\right[$ , e decrescente em  $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ , em vez de  $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right[$ , esta etapa deve ser considerada como cumprida.

<b>11.1.</b> .....	<b>12 pontos</b>
Opção (C)	

<b>11.2.</b> .....	<b>14 pontos</b>
Determinar $T(0)$ .....	2 pontos
Apresentar uma equação que permite obter o valor de $t_2$ $\left(\frac{20 + 100e^{-0,04t} - 120}{t} = -2,4 \text{ ou equivalente}\right)$ ( <b>ver nota</b> ) .....	12 pontos

**Nota** – Se a equação apresentada não traduzir corretamente o problema, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

<b>12.</b> .....	<b>14 pontos</b>
Determinar $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$ .....	6 pontos
Escrever $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x^3 - x}{x^2 - x} + k\right)$ .....	1 ponto
Escrever $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x^3 - x}{x^2 - x} + k\right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(x^2 - 1)}{x(x - 1)} + k$ .....	2 pontos
Escrever $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(x^2 - 1)}{x(x - 1)} + k = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} + k$ .....	1 ponto
Obter $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 1 + k$ .....	2 pontos



Determinar  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$  ..... 7 pontos

Escrever  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2 + x \ln x)$  ..... 1 ponto

Escrever

$\lim_{x \rightarrow 0^+} (2 + x \ln x) = \lim_{y = \frac{1}{x}, y \rightarrow +\infty} \left( 2 + \frac{1}{y} \ln \left( \frac{1}{y} \right) \right)$  ..... 3 pontos

Escrever  $\lim_{y \rightarrow +\infty} \left( 2 + \frac{1}{y} \ln \left( \frac{1}{y} \right) \right) = 2 - \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y}$  ..... 2 pontos

Obter  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 2$  ..... 1 ponto

Concluir que  $k = 1$  ..... 1 ponto

**13.** ..... **14 pontos**

Determinar o domínio da condição ..... 2 pontos

Obter  $(x - 1) \ln(1 - x) = (1 - x) \ln(3 - 2x)$  ..... 2 pontos

Obter  $\ln((1 - x)(3 - 2x)) = 0$  ..... 4 pontos

Obter  $(1 - x)(3 - 2x) = 1$  ..... 3 pontos

Resolver a equação  $(1 - x)(3 - 2x) = 1$  ..... 2 pontos

Apresentar a solução  $\left( \frac{1}{2} \right)$  ..... 1 ponto

**14.** ..... **14 pontos**

Designemos por  $\alpha$  a amplitude do ângulo  $AOB$

Determinar  $\sin \alpha$ , em função de  $k$  ..... 2 pontos

Indicar a ordenada do ponto  $C$ , em função de  $\alpha$  ..... 2 pontos

Escrever  $\sin(3\alpha) = \sin(\alpha + 2\alpha)$  ..... 2 pontos

Obter a expressão pedida ..... 8 pontos

## COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 11 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	1.1.	1.2.	3.1.	3.2.	5.	7.	9.1.	9.2.	11.1.	11.2.	14.	Subtotal
Cotação (em pontos)	12	14	12	14	12	12	14	14	12	14	14	<b>144</b>
Destes 7 itens, contribuem para a classificação final da prova os 4 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	2.	4.	6.	8.	10.	12.	13.					Subtotal
Cotação (em pontos)	4 × 14 pontos											<b>56</b>
<b>TOTAL</b>												<b>200</b>