REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2021

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho

Entrelinha 1,5, sem figuras

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 11 Páginas

---

A prova inclui 11 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 7 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 4 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

Complexos

$(\rho\, e^{i\theta})^n = \rho^n\, e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho\, e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\; e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}} \quad (k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\; e^u$

$(a^u)' = u'\; a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

1. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, um trapézio $[PQRS]$, de bases $[PQ]$ e $[RS]$, em que o lado $[PS]$ é perpendicular às bases.

Tem-se $P(1,-1,2)$, $Q(-2,1,1)$ e $R(-5,5,-3)$

Item obrigatório

1.1. Qual das condições seguintes define a superfície esférica de centro no ponto R e que passa no ponto Q?

(A) $(x-5)^2+(y+5)^2+(z-3)^2=59$

(B) $(x-5)^2+(y+5)^2+(z-3)^2=41$

(C) $(x+5)^2+(y-5)^2+(z+3)^2=41$

(D) $(x+5)^2+(y-5)^2+(z+3)^2=59$

Item obrigatório

1.2. Determine uma equação do plano perpendicular à reta RS e que passa no ponto P

Apresente essa equação na forma $ax+by+cz+d=0$

2. Sabe-se que $\operatorname{sen}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{5}$ e que $\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

Determine, sem recorrer à calculadora, o valor de $\operatorname{tg}(\pi-\alpha)+2\cos\left(-\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)$

Apresente o resultado na forma $\frac{a\sqrt{b}}{c}$, $a\in\mathbb{Z}$, $b\in\mathbb{N}$ e $c\in\mathbb{N}$

3. Numa dada localidade, existe um clube onde se pratica badmínton e ténis.

Item obrigatório

3.1. Com doze raquetes distintas, sendo seis de badmínton e seis de ténis, formam-se, ao acaso, dois conjuntos de seis raquetes cada um.

Qual é o valor, arredondado às centésimas, da probabilidade de cada um dos dois conjuntos ficar com três raquetes de badmínton e três raquetes de ténis?

(A) $0{,}22$

(B) $0{,}43$

(C) $0{,}50$

(D) $0{,}87$

Item obrigatório

3.2. Relativamente a este clube, sabe-se que:

- cada sócio pratica uma e só uma das duas modalidades;
- 65% dos sócios são mulheres;
- $\frac{1}{7}$ dos homens pratica badmínton;
- $\frac{5}{6}$ dos praticantes de badmínton são mulheres.

Escolhe-se, ao acaso, um sócio deste clube.

Determine a probabilidade de o sócio escolhido ser uma mulher que pratica ténis.

Apresente o resultado na forma de percentagem.

4. Considere, num plano α, duas retas paralelas r e s

Assinalam-se, na reta r, cinco pontos distintos e, na reta s, um certo número n de pontos, igualmente distintos.

Sabe-se que, com os pontos assinalados nas duas retas, é possível definir exatamente 175 triângulos.

Determine o valor de n

Item obrigatório

5. Seja g uma função de domínio $\mathbb{R}\setminus\{2\}$

Sabe-se que:

- $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x) = 1$
- $\lim\limits_{x \to 2^+} g(x) = +\infty$

Seja (v_n) a sucessão de termo geral $v_n = 2 - \dfrac{5}{n+3}$

A que é igual $\lim g(v_n)$?

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) $+\infty$

6. Seja (u_n) uma progressão aritmética.

Sabe-se que, relativamente a (u_n), a soma do sexto termo com o vigésimo é igual a -5 e que o décimo nono termo é igual ao quádruplo do sétimo termo.

Determine a soma dos dezasseis primeiros termos desta progressão.

Item obrigatório

7. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = 2e^{i\frac{3\pi}{5}}$

Seja w o número complexo tal que $z \times w = i$

Qual dos valores seguintes é um argumento do número complexo w ?

(A) $\frac{19\pi}{10}$

(B) $\frac{2\pi}{5}$

(C) $-\frac{2\pi}{5}$

(D) $-\frac{19\pi}{10}$

8. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a condição $(1+2i)z + (1-2i)\overline{z} + 10 = 0$ define, no plano complexo, uma reta.

Considere todos os números complexos cujos afixos pertencem a esta reta.

Determine qual deles tem menor módulo.

Apresente esse número complexo na forma $a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$

9. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - e^{-x}}{x} & \text{se} \quad x < 0 \\ \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} - 3 & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Resolva os itens **9.1.** e **9.2.** sem recorrer à calculadora.

Item obrigatório

9.1. Estude a função f quanto à existência de assíntotas horizontais ao seu gráfico e, caso estas existam, escreva as respetivas equações.

Item obrigatório

9.2. Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa -2

10. Seja h a função, de domínio $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, definida por $h(x) = \operatorname{sen} x + \cos^2 x$

Estude, sem recorrer à calculadora, a função h quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, e determine, caso existam, esses extremos.

Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia.

11. Num laboratório cuja temperatura ambiente é constante, aqueceu-se uma substância até atingir uma certa temperatura, superior à temperatura ambiente, e, a seguir, deixou-se arrefecer essa substância durante uma hora.

Admita que a temperatura dessa substância, em graus Celsius, t minutos após o início do arrefecimento, é dada por

$$T(t) = 20 + 100e^{-kt}, \quad 0 \leq t \leq 60$$

em que k é uma constante real positiva.

Item obrigatório

11.1. Durante o arrefecimento, houve um instante t_1 em que a temperatura da substância foi $30\ ^{\text{o}}\text{C}.$

Qual é o valor de k ?

(A) $\ln\left(\dfrac{10}{t_1}\right)$

(B) $t_1 - \ln 10$

(C) $\dfrac{\ln 10}{t_1}$

(D) $t_1 + \ln 10$

Item obrigatório

11.2. Considere $k = 0{,}04$

Sabe-se que, durante os primeiros t_2 minutos, a taxa média de variação da função T foi igual a $-2{,}4$

Escreva uma equação que permita determinar o valor de t_2

Não resolva a equação.

12. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Considere, para um certo número real k, a função g, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - x}{x^2 - x} + k & \text{se} \quad x < 0 \\ 2 + x \ln x & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

Sabe-se que existe $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$

Determine o valor de k

13. Determine, sem recorrer à calculadora, os números reais que são solução da equação

$$x \ln(1 - x) - \ln(1 - x) = (1 - x) \ln(3 - 2x)$$

<u>Item obrigatório</u>

14. Considere, num referencial o.n. xOy, a circunferência trigonométrica.

Sabe-se que:

- os pontos A, B e C pertencem à circunferência;
- o ponto A pertence ao semieixo positivo Ox, o ponto B pertence ao primeiro quadrante, e o ponto C pertence ao segundo quadrante;
- a amplitude do ângulo BOC é igual ao dobro da amplitude do ângulo AOB
- a área do triângulo $[AOB]$ é igual a k

Mostre que a ordenada do ponto C é dada, em função de k, por $6k - 32k^3$

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 11 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.

1.1.	12 pontos
1.2.	14 pontos
3.1.	12 pontos
3.2.	14 pontos
5.	12 pontos
7.	12 pontos
9.1.	14 pontos
9.2.	14 pontos
11.1.	12 pontos
11.2.	14 pontos
14.	14 pontos
SUBTOTAL	**144 pontos**

Destes 7 itens, contribuem para a classificação final da prova os 4 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação (4 × 14 pontos).

2.	14 pontos
4.	14 pontos
6.	14 pontos
8.	14 pontos
10.	14 pontos
12.	14 pontos
13.	14 pontos
SUBTOTAL	**56 pontos**

TOTAL .... **200 pontos**