

Exame Final Nacional de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

Prova 835 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2022

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 27-B/2022, de 23 de março

Entrelinha 1,5

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

14 Páginas

A prova inclui 9 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 5 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente, consoante a situação, todos os elementos relevantes visualizados na sua utilização, como:

- os gráficos obtidos, com os pontos relevantes assinalados (por exemplo, pontos de intersecção de gráficos, pontos de máximos e pontos de mínimos);
 - as linhas da tabela obtida que são relevantes para a resolução;
 - as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).
-

Formulário

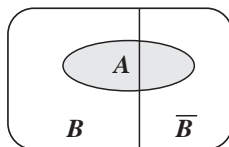
Modelos de grafos

Condição necessária e suficiente para que um grafo conexo admita circuitos de Euler

Um grafo conexo admite circuitos de Euler se e só se todos os seus vértices forem de grau par.

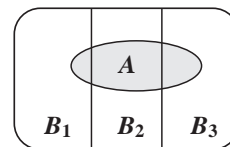
Modelos de probabilidade

Teorema da probabilidade total e regra de Bayes



$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = \\ &= P(B) \times P(A | B) + P(\bar{B}) \times P(A | \bar{B}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(B | A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \\ &= \frac{P(B) \times P(A | B)}{P(B) \times P(A | B) + P(\bar{B}) \times P(A | \bar{B})} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) = \\ &= P(B_1) \times P(A | B_1) + P(B_2) \times P(A | B_2) + P(B_3) \times P(A | B_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(B_k | A) &= \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} = \\ &= \frac{P(B_k) \times P(A | B_k)}{P(B_1) \times P(A | B_1) + P(B_2) \times P(A | B_2) + P(B_3) \times P(A | B_3)} \end{aligned}$$

podendo k tomar os valores 1, 2 ou 3

Modelo normal

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$$

Intervalos de confiança

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável aleatória normal X , admitindo que se conhece o desvio padrão da variável

$$\left] \bar{x} - z \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right[$$

n – dimensão da amostra

\bar{x} – média amostral

σ – desvio padrão da variável

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável aleatória X , admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left] \bar{x} - z \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z \frac{s}{\sqrt{n}} \right[$$

n – dimensão da amostra

\bar{x} – média amostral

s – desvio padrão amostral

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para uma proporção p , admitindo que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left] \hat{p} - z \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right[$$

n – dimensão da amostra

\hat{p} – proporção amostral

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

(*) Valores de z para os níveis de confiança mais usuais

Nível de confiança	90%	95%	99%
z	1,645	1,960	2,576

1. No recrutamento de funcionários para a agência de viagens Ir&Voltar, são valorizadas as competências seguintes: capacidade de comunicação (C), capacidade de negociação (N), domínio da tecnologia (T), domínio da língua inglesa (I) e persistência (P).

Cada candidato é avaliado, em cada competência, numa escala que varia desde o nível 1, menos competente, até ao nível 5, mais competente.

Depois de o candidato ser avaliado, constrói-se o polígono de competências.

Para tal:

- são desenhadas cinco circunferências, com o mesmo centro e diferentes raios; cada circunferência representa um nível, correspondendo a de menor raio ao nível 1, a seguinte ao nível 2, e assim sucessivamente, até à de maior raio, que corresponde ao nível 5;
- são marcados cinco raios da circunferência maior, cada um representando o eixo relativo ao nível de cada uma das cinco competências.

Se um candidato é avaliado com o nível 5 na capacidade de comunicação, é marcado o ponto de intersecção entre o raio correspondente a esta competência e a circunferência correspondente ao nível 5. Procedese de modo semelhante para as restantes competências. Depois de marcados os cinco pontos, estes são ligados, definindo o polígono de competências do candidato.

Na Figura 1, apresentam-se os polígonos de competências dos quatro candidatos que se apresentaram a concurso, a Alice, o Bruno, a Carlota e o Delfim.

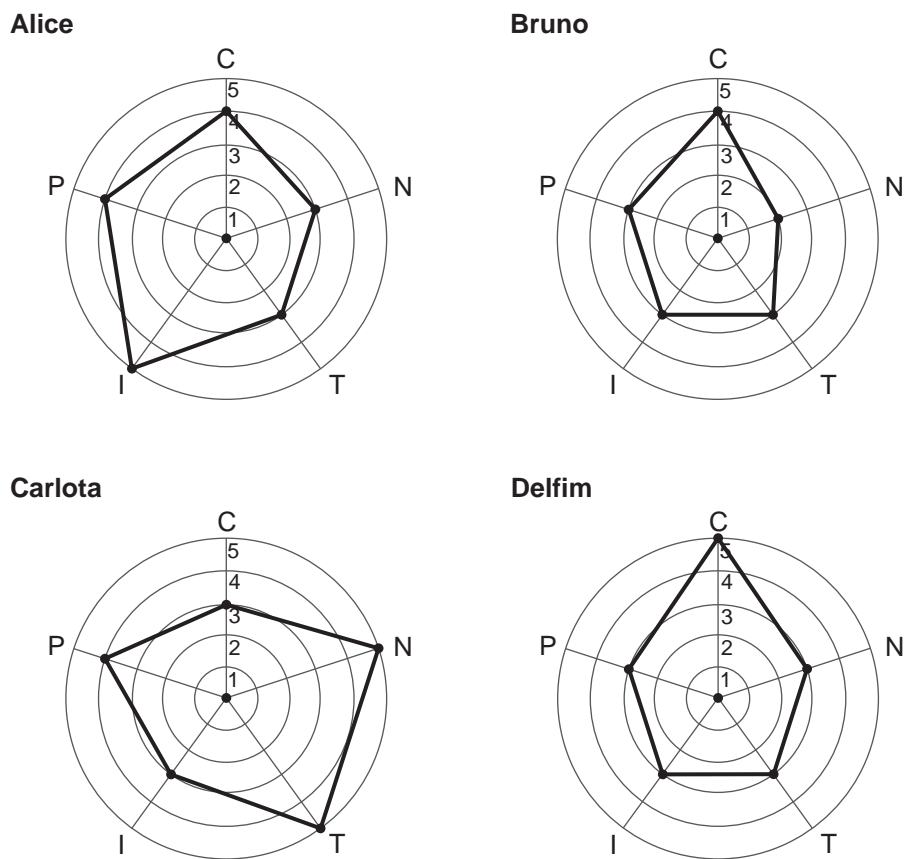


Figura 1

Observando o polígono de competências da Alice, podemos, por exemplo, concluir que foi avaliada com o nível 4 na capacidade de comunicação e com o nível 5 no domínio da língua inglesa.

1.1. Dos quatro candidatos que se apresentaram a concurso, dois deles foram admitidos pela Ir&Voltar.

Na seleção dos candidatos, foi aplicado o método a seguir descrito.

- Os níveis de competência de cada candidato são convertidos em pontos do modo seguinte:
 - o nível de competência C é multiplicado por cinco pontos;
 - o nível de competência N é multiplicado por quatro pontos;
 - o nível de competência T é multiplicado por três pontos;
 - o nível de competência I é multiplicado por dois pontos;
 - o nível de competência P é multiplicado por um ponto.
- Calcula-se a pontuação de cada um dos candidatos, somando os pontos obtidos.
- Ordenam-se os candidatos por ordem decrescente de pontuação, e será essa a ordem de seleção, ou seja, são selecionados os candidatos com maior pontuação.
- Em caso de empate, a seleção entre os candidatos empatados será feita por entrevistas.

Justifique se foram necessárias entrevistas para selecionar os dois candidatos.

Na sua resposta, apresente a pontuação final de cada um dos quatro candidatos.

* 1.2. Considere os polígonos de competências apresentados na Figura 1.

Escolhe-se, ao acaso, um destes quatro polígonos.

Considere os acontecimentos seguintes, associados a esta experiência aleatória:

A: «O polígono escolhido tem assinalado o nível 4 na capacidade de comunicação (C)»

B: «O polígono escolhido tem assinalado, pelo menos, o nível 3 na capacidade de negociação (N)»

Qual é o valor da probabilidade condicionada $P(A|B)$?

- (A) $\frac{1}{4}$
- (B) $\frac{1}{3}$
- (C) $\frac{1}{2}$
- (D) 1

* 2. A Célia e o Guilherme são os dois funcionários da agência de viagens Ir&Voltar que apresentaram melhores resultados no ano de 2021. Pelo seu desempenho, ganharam três viagens, X, Y e Z.

Para a distribuição das três viagens, a Célia e o Guilherme acordaram utilizar o método seguinte.

- Cada funcionário atribui, secretamente, um valor monetário a cada uma das três viagens e coloca o registo dessas licitações dentro de um envelope fechado. Em seguida, os envelopes são abertos e os valores das licitações são registados numa tabela.
- Determina-se o valor global atribuído às viagens por cada funcionário e o valor que cada um considera justo receber. Assume-se que o valor que cada funcionário considera justo receber é igual a metade do valor global que ele atribuiu ao conjunto das três viagens.
- Cada viagem é destinada ao funcionário que mais a valoriza, considerando-se que o funcionário recebe o equivalente ao valor monetário que atribuiu à respetiva viagem.
- Caso, por aplicação do procedimento anterior, um funcionário não receba qualquer viagem, considera-se, para efeito dos cálculos seguintes, que o valor monetário recebido por esse funcionário é zero euros.
- Caso o valor das viagens recebidas por um funcionário ultrapasse o valor que tinha considerado justo receber, esse funcionário disponibiliza, em dinheiro, o respetivo excedente. Caso contrário, esse funcionário deverá receber, em dinheiro, do montante à disposição, o valor em falta.
- Após os procedimentos anteriores, caso ainda reste dinheiro, este é distribuído em partes iguais pelos dois funcionários.

Na Tabela 1, estão parcialmente registados os valores, em euros, atribuídos por cada funcionário nas licitações secretas, em que a representa o valor atribuído pela Célia à viagem Z.

Tabela 1

Viagem	X	Y	Z
Célia	1000	1500	a
Guilherme	1400	1000	550

Por aplicação do método acima descrito, a Célia considerava justo receber 1550 euros.

Determine, de acordo com o método acima descrito, a(s) viagem(ns) atribuída(s) ao Guilherme e o valor monetário que pagou ou recebeu após a inclusão do dinheiro que possa ter restado, de modo que nenhum deles tenha razão para reclamar.

3. Na agência de viagens Ir&Voltar, realizam-se, ao longo da primeira segunda-feira de cada trimestre, seis reuniões de trabalho, *R1*, *R2*, *R3*, *R4*, *R5* e *R6*. Cada reunião tem um tema diferente e dura 90 minutos. De modo a planificar o dia das reuniões, é solicitada a cada funcionário a inscrição em uma ou mais reuniões, de acordo com os seus interesses. Para que todos os funcionários possam assistir às reuniões em que se inscrevem, é criado um horário com blocos de reuniões que possam ocorrer em simultâneo.

Na Tabela 2, apresentam-se as inscrições dos funcionários em cada uma das reuniões a realizar na primeira segunda-feira do terceiro trimestre de 2022.

Tabela 2

<i>R1</i>	<i>R2</i>	<i>R3</i>	<i>R4</i>	<i>R5</i>	<i>R6</i>
António	António	Bernardo	Diamantino	Ana	Célia
Bernardo	Diamantino	Fausto	Elsa	Guilherme	Elsa
Célia	Elsa	Guilherme	Fausto	Ilda	Guilherme
Zulmira	Xavier	Paulo	Paulo	Xavier	Tomás

Com o propósito de determinar o tempo mínimo necessário para que as seis reuniões decorram nas condições definidas, a diretora de planeamento da Ir&Voltar começou por construir um grafo que modelava a situação.

Indique, em horas, o tempo mínimo necessário para que as seis reuniões se realizem nas condições definidas.

Na sua resposta:

- apresente um grafo que a diretora de planeamento pudesse ter construído;
- identifique a constituição de cada bloco de reuniões.

* 4. O Manuel pediu um empréstimo de 1530 euros para comprar uma viagem na agência de viagens Ir&Voltar.

Para pagar o empréstimo, ficou estabelecido que o valor pedido seria dividido em 18 parcelas iguais. Durante 18 meses, o Manuel teria de pagar uma prestação igual ao valor da parcela acrescido de uma taxa de 7%.

Depois de ter pago as 12 primeiras prestações, o Manuel teve umas despesas imprevistas e propôs não pagar as 13.^a, 14.^a e 15.^a prestações no mês previsto, comprometendo-se, no entanto, a terminar o pagamento do empréstimo no 18.^o mês.

Foi aceite a proposta, mas com novas condições.

O valor a pagar nos 16.^o, 17.^o e 18.^o meses seria igual a um terço do valor total das parcelas em dívida, acrescido de uma nova taxa.

Determine a nova taxa, sabendo que, no fim, pelo empréstimo de 1530 euros, o Manuel pagou um total de 1644,75 euros.

Apresente o resultado em percentagem.

5. A ilha de Dujal é um dos destinos de férias mais procurados pelos clientes da agência de viagens Ir&Voltar, devido à diversidade da sua flora.

Para preservar duas espécies de plantas, A e B , que, em dado momento, se encontravam em vias de extinção, foi criado, num viveiro, um projeto de reflorestação, com a duração de dois anos.

O número aproximado de plantas da espécie A e de plantas da espécie B , em centenas, existentes no viveiro, t meses após o início do projeto de reflorestação, é dado, respetivamente, pelas expressões

$$A(t) = 30 + 10 \ln(t^3 + 1) \quad \text{e} \quad B(t) = 10 + 1,26^t \quad \text{com} \quad t \in [0, 24]$$

Assim, por exemplo, como $A(7) \approx 88,406$ centenas, o número aproximado de plantas da espécie A existentes no viveiro, sete meses após o início do projeto, é 8841.

5.1. Determine o valor da percentagem de aumento do número de plantas da espécie A existentes em viveiro durante os primeiros dois meses do projeto de reflorestação.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve três casas decimais.



* 5.2. Ao fim de doze meses, o número de plantas da espécie *A* era, aproximadamente, o _____ do número de plantas da espécie *B*.

Selecione a opção que completa corretamente a frase.

- (A) triplo (B) quádruplo (C) quántuplo (D) sêxtuplo

* 5.3. Determine ao fim de quantos dias, após o início do projeto, o número de plantas da espécie *A* era igual ao número de plantas da espécie *B*.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Admita que cada mês tem 30 dias.

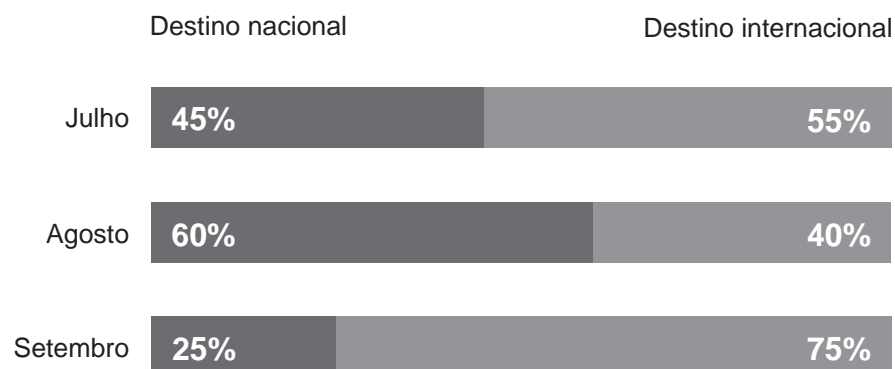
Para responder a esta questão, recorra às capacidades gráficas da sua calculadora e apresente:

- o(s) gráfico(s) visualizado(s);
- a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) relevante(s), com arredondamento às centésimas.

6. No terceiro trimestre do ano de 2021, a agência de viagens Ir&Voltar vendeu, para destinos nacionais e para destinos internacionais, um total de 500 viagens.

No Gráfico 1, está representada, para cada mês do terceiro trimestre de 2021, a distribuição, em percentagem, das viagens vendidas na agência em função do destino.

Gráfico 1



Admita que:

- 48% das viagens vendidas no terceiro trimestre de 2021 são viagens vendidas no mês de agosto;
- o número de viagens vendidas no mês de julho é metade do número de viagens vendidas no mês de agosto.

Determine o número de viagens vendidas no mês de setembro para um destino internacional.

- * 7. O diagrama de dispersão representado na Figura 2 mostra uma forte associação linear positiva entre o preço das viagens de avião vendidas na agência de viagens Ir&Voltar, num determinado período de tempo, e as horas de voo despendidas na viagem de ida e volta.

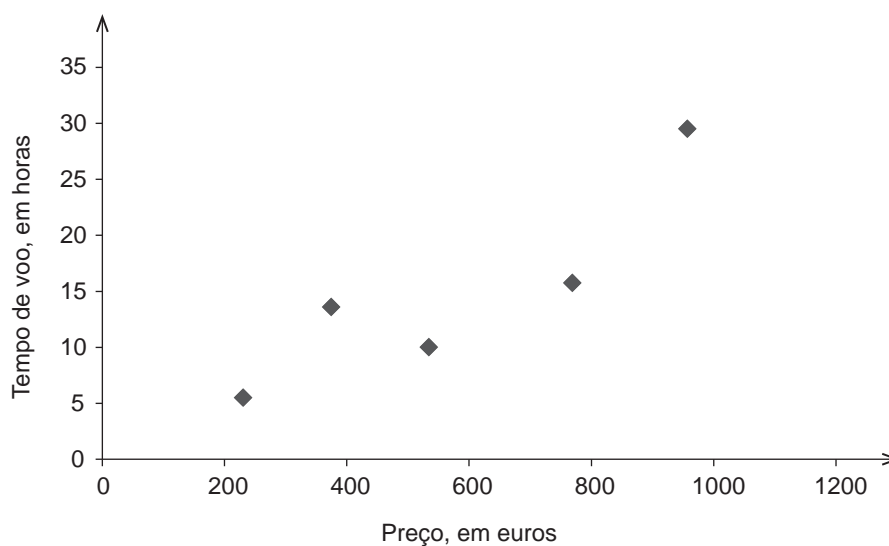


Figura 2

Em cada uma das opções seguintes, são dados um valor de r , coeficiente de correlação linear, e a equação de uma reta.

Em qual das opções poderão estar representados o valor de r e uma equação da reta de regressão linear da distribuição representada na Figura 2?

- (A) $r = -0,92$
 $y = 0,03x - 0,86$
- (B) $r = -0,2$
 $y = -0,03x - 0,86$
- (C) $r = 0,92$
 $y = -0,03x - 0,86$
- (D) $r = 0,89$
 $y = 0,03x - 0,86$

- * 8. A agência de viagens Ir&Voltar foi inaugurada a 3 de janeiro de 2015. Desde essa data até ao dia 3 de janeiro de 2018, houve um grupo de funcionários que se manteve na empresa.

Na Tabela 3, estão representadas as idades desses funcionários no dia da inauguração da Ir&Voltar, em que b representa o número de funcionários com 31 anos.

Tabela 3

Idade no dia da inauguração (em anos)	Número de funcionários
20	1
22	3
26	2
31	b
40	2

No dia 3 de janeiro de 2018, a média das idades desses funcionários era 31,5 anos.

Determine quantos desses funcionários tinham 31 anos quando a agência foi inaugurada.

9. Na localidade onde se situa a agência de viagens Ir&Voltar, existe também a agência de viagens Vá&Volte.

Das 200 pessoas que responderam a um questionário, 140 referiram que já tinham comprado viagens na Ir&Voltar.

- * 9.1. Foi, ainda, possível apurar que, das 200 pessoas que responderam ao questionário:

- 75 pessoas já tinham comprado viagens na agência Vá&Volte;
- 40 pessoas não compraram viagens nem na agência Ir&Voltar nem na agência Vá&Volte.

Escolhe-se, ao acaso, uma das 200 pessoas questionadas.

Determine a probabilidade de essa pessoa já ter comprado viagens em ambas as agências.

Apresente o resultado na forma de dízima.

9.2. Quando questionadas as 200 pessoas sobre se já tinham feito um cruzeiro, verificou-se o seguinte:

- 35% das pessoas nunca fizeram um cruzeiro;
- das pessoas que não compraram viagens na agência Ir&Voltar, 70% nunca fizeram um cruzeiro.

Qual é a probabilidade de uma das pessoas questionadas, escolhida ao acaso, ter comprado viagens na Ir&Voltar, sabendo-se que não fez um cruzeiro?

Apresente o resultado na forma de dízima.

* 10. Com o intuito de saber qual dos três destinos turísticos, Caraíbas, Dubai ou Maldivas, seria o mais pretendido pelos seus clientes, a responsável pelo *marketing* da agência de viagens Ir&Voltar selecionou, ao acaso, alguns dos clientes da agência, e estes indicaram o seu destino favorito de entre os destinos referidos.

Na Tabela 4, estão registadas as preferências indicadas pelos clientes selecionados.

Tabela 4

Destino	Caraíbas	Dubai	Maldivas
N.º de clientes	125	400	100

A amplitude de um intervalo de confiança para a proporção de clientes da Ir&Voltar que indicam o Dubai como destino favorito, em vez das Caraíbas ou das Maldivas, considerando a amostra de clientes constituída pela responsável do *marketing*, é 0,075264.

Determine o nível de confiança desse intervalo.

Na sua resposta, apresente o valor da proporção amostral.

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 9 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	1.2.	2.	4.	5.2.	5.3.	7.	8.	9.1.	10.	Subtotal
Cotação (em pontos)	12	20	18	12	18	12	18	18	18	146
Destes 5 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	1.1.	3.	5.1.	6.	9.2.	Subtotal				
Cotação (em pontos)	3 x 18 pontos									54
TOTAL										200