

**Exame Final Nacional de Matemática A**  
**Prova 635 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2023**

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 22/2023, de 3 de abril

**Entrelinha 1,5 sem figuras**

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

11 Páginas

---

A prova inclui 12 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 6 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

---

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

---

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

---

# Formulário

---

## Geometria

**Comprimento de um arco de circunferência:**

$\alpha r$  ( $\alpha$  – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;  $r$  – raio)

**Área de um polígono regular:**  $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

**Área de um sector circular:**

$\frac{\alpha r^2}{2}$  ( $\alpha$  – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;  $r$  – raio)

**Área lateral de um cone:**  $\pi r g$  ( $r$  – raio da base;  $g$  – geratriz)

**Área de uma superfície esférica:**  $4\pi r^2$  ( $r$  – raio)

**Volume de uma pirâmide:**  $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

**Volume de um cone:**  $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

**Volume de uma esfera:**  $\frac{4}{3}\pi r^3$  ( $r$  – raio)

## Progressões

Soma dos  $n$  primeiros termos de uma progressão  $(u_n)$ :

**Progressão aritmética:**  $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

**Progressão geométrica:**  $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

## Trigonometria

$\text{sen}(a + b) = \text{sen} a \cos b + \text{sen} b \cos a$

$\text{cos}(a + b) = \text{cos} a \cos b - \text{sen} a \text{sen} b$

## Complexos

$(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$  ( $k \in \{0, \dots, n-1\}$  e  $n \in \mathbb{N}$ )

## Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u v)' = u' v + u v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' v - u v'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n u^{n-1} u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$$

$$(\operatorname{cos} u)' = -u' \operatorname{sen} u$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\operatorname{cos}^2 u}$$

$$(e^u)' = u' e^u$$

$$(a^u)' = u' a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

## Limites notáveis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$

**Item obrigatório**

1. Qual é o limite da sucessão de termo geral  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}$  ?

- a) 1
- b)  $2e$
- c)  $e^2$
- d)  $+\infty$

2. Considere uma linha poligonal simples que começou a ser construída a partir de um segmento de reta,  $[AB]$ . O segundo segmento de reta, com uma das extremidades em  $B$ , foi construído com mais 2 cm do que o primeiro, o terceiro segmento foi construído com mais 2 cm do que o segundo, e assim sucessivamente, tendo cada segmento de reta sempre mais 2 cm do que o anterior.

Continuando a construção da linha poligonal, do modo acima descrito, até ao 100.º segmento de reta, obtém-se uma linha poligonal com o comprimento total de 104 metros.

Determine o comprimento do segmento de reta  $[AB]$ .

Apresente o valor pedido em centímetros.

**Item obrigatório**

3. Seja  $f$  uma função diferenciável, de domínio  $\mathbb{R}$ , cuja derivada,  $f'$ , é dada por

$$f'(x) = -2xe^{1-x^2}$$

Estude a função  $f$  quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

Na sua resposta, apresente:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de  $f$  tem concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de  $f$  tem concavidade voltada para cima;
- a(s) abscissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de  $f$ , caso este(s) exista(m).

4. Considere a função  $g$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por

$$g(x) = \begin{cases} \frac{4x-4}{e^{x-1}-1} & \text{se } x < 1 \\ 7 \times 3^{x-1} - 3 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

**Item obrigatório**

4.1. Averigue se a função  $g$  é contínua em  $x = 1$ .

4.2. Resolva, no intervalo  $[1, +\infty[$ , a equação  $\log_3(g(x)) = x + \log_3 2$ .

5. Um grupo de jovens inscreveu-se num campo de férias que oferece as modalidades de *surf* e de *skate*.

**Item obrigatório**

5.1. Dez dos jovens do grupo vão deslocar-se em fila, pela praia, para uma aula de *surf*.

A Ana, o Diogo e o Francisco são três desses jovens.

De quantas formas diferentes se podem dispor os jovens na fila, ficando a Ana, o Diogo e o Francisco juntos?

a) 483 840

b) 241 920

c) 60 480

d) 30 240

**5.2.** No ato da inscrição, todos os jovens do grupo responderam a um questionário sobre a prática das modalidades de *surf* e de *skate*.

De acordo com as respostas ao questionário:

- 65% praticavam *surf* ;
- 20% praticavam *skate* e não praticavam *surf* ;
- quatro em cada cinco dos que praticavam *surf* também praticavam *skate*.

Selecionou-se, ao acaso, um jovem que, no questionário, tinha respondido que não praticava *skate*.

Determine a probabilidade de esse jovem, no questionário, também ter respondido que praticava *surf*.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

### **Item obrigatório**

**5.3.** Considere que, no grupo, há 70 jovens com 13 ou 14 anos de idade, sendo o número de jovens com 14 anos maior do que o número de jovens com 13 anos.

Para realizar uma determinada tarefa, vão ser selecionados, aleatoriamente, dois desses jovens.

Sabe-se que a probabilidade de selecionar dois desses jovens com idades distintas é  $\frac{16}{35}$ .

Determine o número de jovens com 13 anos que há no grupo.

6. Considere, em referencial o.n.  $Oxyz$  :

- um ponto,  $A$  , pertencente ao semieixo positivo  $Ox$  ;
- o ponto  $B$  , tal que o vetor  $\overrightarrow{AB}$  tem coordenadas  $(0; 12,5; 0)$  ;
- a reta  $r$  que contém o ponto  $A$  e é definida pela equação vetorial  $(x, y, z) = (10, 0, 0) + k(0, 4, 3)$  ,  $k \in \mathbb{R}$ .

**Item obrigatório**

6.1. Qual das seguintes equações vetoriais define a reta paralela à reta  $r$  e que contém a origem do referencial?

- a)  $(x, y, z) = (0, 6, 8) + k\left(0, 2, \frac{3}{2}\right)$  ,  $k \in \mathbb{R}$
- b)  $(x, y, z) = (0, -4, -3) + k\left(0, 2, \frac{3}{2}\right)$  ,  $k \in \mathbb{R}$
- c)  $(x, y, z) = (0, -4, -3) + k(0, 3, -4)$  ,  $k \in \mathbb{R}$
- d)  $(x, y, z) = (0, 6, 8) + k(0, 3, -4)$  ,  $k \in \mathbb{R}$

**Item obrigatório**

6.2. A reta  $r$  intersecta a superfície esférica de diâmetro  $[AB]$  nos pontos  $A$  e  $C$  .

Determine as coordenadas do ponto  $C$  .

7. Considere, em referencial o.n.  $Oxy$  , uma circunferência de centro na origem e os pontos  $A$  ,  $P$  e  $Q$  , que pertencem à circunferência.

Sabe-se que:

- o ponto  $A$  tem coordenadas  $(2, 0)$  ;
- o ângulo orientado  $AOQ$  tem amplitude  $\alpha \in \left] \pi, \frac{3\pi}{2} \right[$  ;
- o ponto  $P$  pertence ao segundo quadrante e tem a mesma abscissa que o ponto  $Q$  ;
- $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 3$  .

Determine o valor de  $\cos(2\alpha)$  .

### **Item obrigatório**

8. Uma empresa está a desenvolver um programa de testes para melhorar a propulsão de foguetes.

Os foguetes utilizados partem do solo e seguem uma trajetória vertical.

Em relação a um dos modelos de foguete utilizados, admita que, após o lançamento e até se esgotar o combustível, a sua distância ao solo,  $a$ , em metros, é dada, a cada instante  $t$ , em segundos, por

$$a(t) = 100 \left[ t + (10 - t) \ln \left( 1 - \frac{t}{10} \right) \right] - 4,9t^2, \text{ com } t \in [0, 8]$$

Existe um instante,  $t_0$ , a partir do qual, durante 3 segundos, esse foguete percorre 25 metros.

Apresente uma equação que lhe permita determinar  $t_0$ .

Não resolva a equação.

### **Item obrigatório**

9. Sejam  $f$  e  $g$  funções duas vezes diferenciáveis, de domínios  $\mathbb{R}$  e  $]0, +\infty[$ , respetivamente, e seja  $r$  a reta de equação  $y = 2x - 1$ .

Sabe-se que:

- a reta  $r$  é tangente ao gráfico de  $g$  no ponto de abcissa 1;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x + 1) = 0$ ;
- nos respetivos domínios, o gráfico de  $f$  tem concavidade voltada para cima e o gráfico de  $g$  tem concavidade voltada para baixo.

Considere as proposições seguintes.

I. O gráfico da função  $f$  admite uma assíntota horizontal quando  $x$  tende para  $+\infty$ .

II.  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2$ .

III.  $f''(x) < g''(x)$ ,  $\forall x \in ]0, +\infty[$ .

Justifique que as proposições I, II e III são falsas.

Na sua resposta, apresente, para cada uma das proposições, uma razão que justifique a sua falsidade.



**Item obrigatório**

10. Considere, no plano complexo, os pontos  $O$ ,  $A$  e  $B$  tais que:

- o ponto  $O$  é a origem do referencial;
- o ponto  $A$  pertence ao primeiro quadrante, e é o afixo de um número complexo  $z$  tal que  $\text{Im}(z) = \text{Re}(z)$  e  $\text{Re}(z) > 0$ ;
- o ponto  $B$  pertence ao segundo quadrante, e é o afixo de um número complexo  $w$  tal que o ângulo convexo  $AOB$  tem amplitude  $\frac{5\pi}{8}$  radianos.

Qual dos valores seguintes é um argumento de  $w \times z$  ?

- a)  $\frac{3\pi}{8}$
- b)  $\frac{5\pi}{8}$
- c)  $\frac{9\pi}{8}$
- d)  $\frac{11\pi}{8}$

11. Considere, em  $\mathbb{C}$ , conjunto dos números complexos, o número  $w = \frac{e^{i\frac{5\pi}{6}} - i^{17}}{i}$ .

Determine, em  $\mathbb{C}$ , as soluções da equação  $z^2 = w$ .

Apresente os valores pedidos na forma  $a + bi$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$ .

12. Seja  $f$  a função, de domínio  $[0, \pi]$ , definida por  $f(x) = \sin(2x) + x$ , e seja  $r$  a reta de equação  $y = -x + 2$ .

**Item obrigatório**

- 12.1. Qual das expressões seguintes pode definir a função derivada de  $f$ ?

a)  $2 - 2 \cos^2 x$

b)  $2 - 2 \sin^2 x$

c)  $3 - 4 \cos^2 x$

d)  $3 - 4 \sin^2 x$

- 12.2. Mostre, recorrendo ao teorema de Bolzano-Cauchy, que o gráfico da função  $f$  intersecta a reta  $r$  em, pelo menos, um ponto de abscissa pertencente ao intervalo  $\left] \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right[$ .

**Item obrigatório**

13. Sejam  $a$  e  $b$  números reais, não nulos, tais que a reta de equação  $y = ax + b$  é tangente ao gráfico da função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = ax^2 + bx$ .

Determine as coordenadas do ponto de tangência.

**FIM**

## COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens contribuem obrigatoriamente para a classificação final da prova.

1.	.....	12 pontos
3.	.....	14 pontos
4.1.	.....	14 pontos
5.1.	.....	12 pontos
5.3.	.....	14 pontos
6.1.	.....	12 pontos
6.2.	.....	14 pontos
8.	.....	14 pontos
9.	.....	14 pontos
10.	.....	12 pontos
12.1.	.....	12 pontos
13.	.....	14 pontos
<b>Subtotal</b> .....		158 pontos

Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

2.	.....	14 pontos
4.2.	.....	14 pontos
5.2.	.....	14 pontos
7.	.....	14 pontos
11.	.....	14 pontos
12.2.	.....	14 pontos
<b>Subtotal</b> .....		42 pontos
<b>TOTAL</b> .....		200 pontos