REPÚBLICA PORTUGUESA

EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2023

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 22/2023, de 3 de abril

Entrelinha 1,5 sem figuras

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 11 Páginas

A prova inclui 12 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 6 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

Complexos

$(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ $\quad (k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\, e^u$

$(a^u)' = u'\, a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

Item obrigatório

1. Seja (u_n) uma sucessão tal que $\lim u_n = 0$.

   Qual das expressões seguintes pode ser termo geral de (u_n) ?

   a) $\left(1 - \frac{2}{n}\right)^n$

   b) $-\frac{n^2 + 1}{n}$

   c) $\frac{4n + 3}{3n + 4}$

   d) $\frac{(-1)^n}{n}$

2. Considere um triângulo equilátero, $[ABC]$, com $\overline{AB} = 1$.

   Unindo os pontos médios dos lados desse triângulo, obtém-se um segundo triângulo; unindo os pontos médios dos lados do segundo triângulo, obtém-se um terceiro triângulo. Continuando a proceder deste modo, obtém-se uma sequência de n triângulos, com $n > 3$.

   Mostre que a soma dos perímetros dos n triângulos da sequência é menor do que 6 unidades, qualquer que seja o valor de n .

Item obrigatório

3. Considere todos os números naturais de seis algarismos que é possível formar com os algarismos de 1 a 9 .

   Destes números, quantos têm exatamente dois cincos?

   a) $98\,415$

   b) $61\,440$

   c) $36\,015$

   d) $25\,200$

4. Seja E, conjunto finito, o espaço amostral associado a uma experiência aleatória, e sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset E$ e $B \subset E)$.

Sabe-se que:

- A e B são acontecimentos equiprováveis;
- $P(\overline{A}) = 0{,}6$;
- $P(A \cup \overline{B}) = 0{,}7$.

Determine o valor de $P((A \cup \overline{B}) \mid B)$.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

Item obrigatório

5. Uma certa composição geométrica é formada por n hexágonos regulares inscritos em n circunferências concêntricas, contidas num mesmo plano, de raios diferentes e de centro no ponto V.

Considere o conjunto de pontos formado pelo ponto V e pelos vértices de todos os hexágonos da composição.

Sabe-se que, selecionando, ao acaso, dois pontos desse conjunto, a probabilidade de estes serem vértices do mesmo hexágono é igual a $\frac{5}{49}$.

Determine o valor de n .

6. Seja f uma função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = a + e^{bx}$, em que a e b são números reais.

Sabendo que o gráfico da função f contém os pontos de coordenadas $(1, 5)$ e $(2, 7)$, determine os valores de a e de b .

Item obrigatório

7. Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x}$?

a) 0

b) $\frac{1}{2}$

c) 1

d) 2

8. Considere, em referencial o.n. $Oxyz$:

- os pontos A e B de coordenadas $(4, 0, 0)$ e $\left(12, \frac{13}{2}, 2\right)$, respetivamente;
- a reta r, definida pela equação vetorial $(x, y, z) = (-2, -8, 4) + k(3, 4, 0)$, $k \in \mathbb{R}$;
- o plano α que contém o ponto A e é perpendicular à reta r .

Item obrigatório

8.1. Qual das seguintes equações define a superfície esférica de diâmetro $[AB]$?

a) $(x-8)^2 + \left(y - \frac{13}{4}\right)^2 + (z-1)^2 = \frac{441}{16}$

b) $(x-8)^2 + \left(y - \frac{13}{4}\right)^2 + (z-1)^2 = \frac{441}{4}$

c) $(x-4)^2 + y^2 + z^2 = \frac{441}{16}$

d) $(x-4)^2 + y^2 + z^2 = \frac{441}{4}$

Item obrigatório

8.2. Seja C o ponto do plano α tal que a reta BC é paralela à reta r .

Determine as coordenadas do ponto C .

9. Considere, em referencial o.n. Oxy, um retângulo, $[OABC]$, e dois pontos, D e E.

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao semieixo positivo Ox;
- o ponto C pertence ao semieixo positivo Oy e $\overline{OC} = \frac{\overline{OA}}{4}$;
- o ponto D pertence ao segmento de reta $[OA]$ e $\overline{OD} = \frac{\overline{OA}}{3}$;
- o ponto E pertence ao segmento de reta $[CB]$ e $\overline{EB} = \overline{OD}$;
- $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DE} = -7$.

Determine $\overline{OA}$.

Item obrigatório

10. Seja g uma função par, diferenciável, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, tal que:

- $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = +\infty$;
- $g(0) < 0$;
- $g'(x) < 0, \ \forall x \in]-\infty, -1[$.

Considere as proposições seguintes.

I. $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = 1$.

II. A função g é crescente no intervalo $]-\infty, -1[$.

III. $\lim\limits_{x \to -1^+} g(x) = -\infty$.

Justifique que as proposições **I**, **II** e **III** são falsas.

Na sua resposta, apresente, para cada uma das proposições, uma razão que justifique a sua falsidade.

Item obrigatório

11. Considere, no plano complexo, um triângulo equilátero, $[ABC]$, inscrito numa circunferência de centro na origem do referencial, O.

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao semieixo imaginário positivo;
- o ponto B pertence ao terceiro quadrante;
- os pontos A e B são os afixos dos números complexos z_1 e z_2, respetivamente.

A qual dos quadrantes do plano complexo pertence o afixo do número complexo $z_1^2 \times z_2$?

a) Ao primeiro.

b) Ao segundo.

c) Ao terceiro.

d) Ao quarto.

12. Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, o número $z = \dfrac{2i^{11} e^{i\alpha}}{-1-\sqrt{3}\,i}$, com $\alpha \in [0, 2\pi[$.

Sabe-se que:

- $\operatorname{Re}(z) = -\operatorname{Im}(z)$;
- o afixo de z pertence ao 4.º quadrante.

Determine, sem recorrer à calculadora, o valor de α.

Item obrigatório

13. Para fazer obras de remodelação das instalações, uma pequena empresa pretende pedir um empréstimo a um banco, a pagar em prestações mensais iguais.

De acordo com a proposta do banco, o valor da prestação mensal a pagar, p, em euros, é dado, em função da taxa de juro anual aplicada, j, em percentagem, pela expressão

$$p(j) = \frac{62{,}5j}{1 - \left(1 + \frac{j}{1200}\right)^{-120}} \quad , \quad \text{com } j > 0$$

Sabe-se que, no caso de a taxa de juro anual inicial duplicar, a prestação mensal aumentará 120 euros.

Apresente uma equação que lhe permita determinar a taxa de juro anual inicial.

Não resolva a equação.

14. Considere a função f, de domínio $]0, +\infty[$, definida por

$$f(x) = \frac{\ln x + 2x}{x}$$

Item obrigatório

14.1. O gráfico da função f admite uma assíntota vertical e uma assíntota horizontal.

Determine uma equação de cada uma dessas assíntotas.

14.2. Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos e determine esses extremos, caso existam.

Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia da função f.

Item obrigatório

15. Considere, em referencial o.n. Oxy, a circunferência de raio 2, e centro na origem do referencial, e a reta r, tangente à circunferência num ponto T, pertencente ao primeiro quadrante.

Sabe-se que:

- a reta r intersecta os eixos Ox e Oy nos pontos A e B, respetivamente;
- $A\hat{O}T = \alpha$, com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Prove que a área do triângulo $[OAB]$ é dada, em função de α, por $\dfrac{4}{\operatorname{sen}(2\alpha)}$.

Item obrigatório

16. Considere as funções f e g, de domínio $]0, +\infty[$, definidas por $f(x) = \dfrac{k}{x}$ e por $g(x) = -\dfrac{k}{x}$, com $k > 0$.

Considere ainda:

- dois pontos P e Q, com a mesma abcissa, pertencentes, respetivamente, ao gráfico da função f e ao gráfico da função g;
- a reta s, tangente ao gráfico da função f no ponto P;
- a reta t, tangente ao gráfico da função g no ponto Q;
- o ponto R, ponto de intersecção das retas s e t.

Mostre que, qualquer que seja a abcissa dos pontos P e Q, a área do triângulo $[PQR]$ é igual a k.

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens contribuem obrigatoriamente para a classificação final da prova.

1.	12 pontos
3.	12 pontos
5.	14 pontos
7.	12 pontos
8.1.	12 pontos
8.2.	14 pontos
10.	14 pontos
11.	12 pontos
13.	14 pontos
14.1.	14 pontos
15.	14 pontos
16.	14 pontos
Subtotal	158 pontos

Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

2.	14 pontos
4.	14 pontos
6.	14 pontos
9.	14 pontos
12.	14 pontos
14.2.	14 pontos
Subtotal	42 pontos

TOTAL	200 pontos