REPÚBLICA PORTUGUESA

EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática B

Prova 735 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2023

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 22/2023, de 3 de abril

Braille

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 8 Páginas

A prova inclui 9 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 5 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr $(\alpha -$ amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; $r -$ raio$)$

ou

$\frac{\alpha \pi r}{180}$ $(\alpha -$ amplitude, em graus, do ângulo ao centro; $r -$ raio$)$

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\ maior \times Diagonal\ menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\ maior + Base\ menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: $Semiperímetro \times Apótema$

Sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ $(\alpha -$ amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; $r -$ raio$)$

ou

$\frac{\alpha \pi r^2}{360}$ $(\alpha -$ amplitude, em graus, do ângulo ao centro; $r -$ raio$)$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ $(r -$ raio da base; $g -$ geratriz$)$

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$ $(r -$ raio$)$

Área lateral de um cilindro reto: $2 \pi r g$ $(r -$ raio da base; $g -$ geratriz$)$

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Cone: $\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ $(r -$ raio$)$

Cilindro: $Área\ da\ base \times Altura$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

- **Progressão aritmética:** $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

- **Progressão geométrica:** $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Probabilidades e Estatística

Se X é uma variável aleatória discreta de valores x_i com probabilidade p_i, então:

- **Valor médio** de X:
  $\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

- **Desvio padrão** de X:
  $\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é uma variável aleatória normal de valor médio μ e desvio padrão σ, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Item obrigatório

1. Uma empresa decidiu produzir dois tipos de concentrado de frutas, ambos feitos à base de maçã, pera e romã.

Cada quilograma de concentrado do tipo I é vendido a $2{,}50$ € e contém $0{,}45\ \mathrm{kg}$ de maçã, $0{,}40\ \mathrm{kg}$ de pera e $0{,}15\ \mathrm{kg}$ de romã.

Cada quilograma de concentrado do tipo II é vendido a $3{,}00$ € e contém $0{,}40\ \mathrm{kg}$ de maçã, $0{,}25\ \mathrm{kg}$ de pera e $0{,}35\ \mathrm{kg}$ de romã.

A empresa dispõe, diariamente, de $218{,}50\ \mathrm{kg}$ de maçã, de $168{,}15\ \mathrm{kg}$ de pera e de $140{,}00\ \mathrm{kg}$ de romã.

A empresa tem garantida a venda de toda a produção diária dos dois tipos de concentrado, e pretende determinar quantos quilogramas de concentrado do tipo I e quantos quilogramas de concentrado do tipo II deve produzir, diariamente, para que o valor de vendas do total dos dois concentrados seja máximo.

Seja x o número de quilogramas de concentrado do tipo I e seja y o número de quilogramas de concentrado do tipo II a produzir, diariamente, pela empresa.

Apresente uma expressão da função objetivo e um sistema de restrições que permitam determinar o valor de x e o valor de y correspondentes à solução do problema.

Item obrigatório

2. O número de dias por semana em que se tem de regar o jardim depende essencialmente das condições meteorológicas. Nos meses de verão, o Sr. Ferreira tem de regar o jardim com muita frequência.

Seja X a variável aleatória «Número de dias, numa semana de verão, em que o Sr. Ferreira rega o jardim», com $X \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Admita que:

$$P(X=1)=0{,}01;\ P(X=2)=0{,}02;\ P(X=3)=0{,}05;\ P(X=4)=0{,}09;$$
$$P(X=5)=0{,}41;\ P(X=6)=0{,}21;\ P(X=7)=0{,}21.$$

Considera-se, ao acaso, uma semana de verão.

Qual é a probabilidade, de acordo com a variável aleatória X, de o Sr. Ferreira não regar o jardim nessa semana?

Justifique a sua resposta.

3. O neto do Sr. Ferreira, que está no 1.º ano, escreveu uma sequência de números pares consecutivos, a começar em 2 :

2 , 4 , 6 , ...

Item obrigatório

3.1. Determine o $15.^{\text{o}}$ número par escrito pelo neto do Sr. Ferreira.

3.2. A soma de todos os números escritos pelo neto do Sr. Ferreira é 420 .

Qual é o último termo da sequência escrita pelo neto do Sr. Ferreira?

Justifique a sua resposta.

4. Admita que a altura de uma árvore, h , em metros, t anos após ter sido plantada, é dada por

$$h(t) = \frac{13}{1 + 19{,}26e^{-0{,}58t}} \quad , \text{ com } t \geq 0$$

Item obrigatório

4.1. Determine quantos centímetros cresceu a árvore durante o primeiro ano após ter sido plantada.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

Item obrigatório

4.2. Quanto tempo decorreu entre o instante em que a árvore foi plantada e o instante em que ultrapassou os 7 metros de altura, de acordo com o modelo apresentado?

Apresente o valor pedido em anos e meses, com o número de meses arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

4.3. É possível esta árvore atingir $13{,}5$ metros de altura, de acordo com o modelo apresentado?

Justifique a sua resposta.

Item obrigatório

5. A tabela seguinte foi construída a partir de dados do Instituto Nacional de Estatística (INE) e diz respeito à produção total acumulada de batata de sequeiro, em toneladas, em Portugal continental, de 2017 a 2021, desde o início de 2017.

Ano	Produção total
2017	8811
2018	17 344
2019	28 617
2020	38 972
2021	49 566

Para 2022, o INE previa uma redução de 15% da produção anual de batata de sequeiro relativamente à produção anual em 2021, em Portugal continental.

Determine o valor da produção anual de batata de sequeiro previsto pelo INE para 2022, em Portugal continental.

Apresente o valor pedido em milhares de toneladas, arredondado às unidades de milhar.

6. Na quinta do Sr. Ferreira, existe um depósito de água para rega. Considere que para se encher o depósito, que estava inicialmente vazio, se usou uma torneira com caudal constante.

Seja f a função que dá a altura, em metros, de água no depósito, t horas desde o instante em que se começou a encher o depósito, até ao instante em que ficou cheio, durante 6 horas.

Quando o depósito está cheio, a altura de água coincide com a altura do depósito.

O gráfico cartesiano da função f é um segmento de reta com extremos na origem do referencial e no ponto de coordenadas $(6; 2{,}5)$.

6.1. Seja V a função que dá a taxa de variação instantânea da função f no intervalo $[0, 6]$.

O sinal da função V , no intervalo $[0, 6]$ é negativo, nulo ou positivo?

Justifique a sua resposta.

Item obrigatório

6.2. Considere dois depósitos:

- depósito A, com forma de tronco de cone reto, assente pela sua base menor;
- depósito B, com forma esférica.

Justifique que nenhum desses depósitos pode ser o existente na quinta do Sr. Ferreira, apresentando uma razão para cada um dos depósitos.

7. Considere um círculo com 10 cm de raio e um triângulo equilátero inscrito na circunferência que delimita esse círculo.

7.1. Determine a área do triângulo, em cm^2 .

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, conserve, no mínimo, três casas decimais.

<u>Item obrigatório</u>

7.2. Fixa-se, na circunferência, um referencial o.n. Oxy , fixando o centímetro unidade de medida, e cuja origem coincida com o centro da circunferência.

Apresente as coordenadas dos pontos de intersecção da circunferência com os eixos coordenados deste referencial.

8. Seja h a função que dá a altura de maré, em metros, no porto de Viana do Castelo, durante os dois primeiros dias do ano de 2022.

Admita que h pode ser definida por

$$h(t) = 2 + 1{,}5 \operatorname{sen}(0{,}5t + 1)$$

em que t é o tempo, em horas, decorrido desde as 0 horas do dia 1 de janeiro.

O argumento da função seno está em radianos.

8.1. Qual era a altura de maré, em metros, no porto de Viana de Castelo, às 20 h do dia 2 de janeiro de 2022, de acordo com o modelo apresentado?

Apresente o resultado em metros, arredondado às décimas.

<u>Item obrigatório</u>

8.2. Determine, de acordo com o modelo apresentado, a que horas se verificou a primeira preia-mar, ou seja, valor máximo da altura de maré, no primeiro dia de janeiro de 2022.

Apresente o resultado em horas e minutos, com os minutos arredondados às unidades.

Em cálculos intermédios, conserve, no mínimo, três casas decimais.

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 9 itens contribuem obrigatoriamente para a classificação final da prova.

1.	20 pontos
2.	16 pontos
3.1.	16 pontos
4.1.	16 pontos
4.2.	16 pontos
5.	16 pontos
6.2.	20 pontos
7.2.	16 pontos
8.2.	16 pontos
Subtotal	152 pontos

Destes 5 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

3.2.	16 pontos
4.3.	16 pontos
6.1.	16 pontos
7.1.	16 pontos
8.1.	16 pontos
Subtotal	48 pontos
TOTAL	200 pontos