

## **Exame Final Nacional de Matemática A**

### **Prova 635 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2024**

#### **12.º Ano de Escolaridade**

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 62/2023, de 25 de julho

#### **Braille**

#### **Critérios de Classificação**

11 Páginas

### **CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO**

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

#### **ITENS DE SELEÇÃO**

As respostas aos itens de seleção podem ser classificadas de forma dicotómica ou por níveis de desempenho, de acordo com os critérios específicos. No primeiro caso, a pontuação só é atribuída às respostas corretas, sendo todas as outras respostas classificadas com zero pontos. No caso da classificação por níveis de desempenho, a cada nível corresponde uma dada pontuação, de acordo com os critérios específicos.

Nas respostas aos itens de seleção, a transcrição do texto da opção escolhida é considerada equivalente à indicação da letra ou do número correspondente.

#### **ITENS DE CONSTRUÇÃO**

Nos itens de construção, os critérios de classificação podem apresentar-se organizados apenas por níveis de desempenho, por parâmetros, com os respetivos níveis de desempenho, ou por etapas.

Nos itens em que os critérios de classificação se apresentam organizados apenas por níveis de desempenho, a cada nível de desempenho corresponde uma dada pontuação. Se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

Nos itens em que os critérios de classificação se apresentam organizados por parâmetros, a classificação a atribuir à resposta resulta da soma das pontuações atribuídas aos parâmetros seguintes: (A) Conteúdos, (B) Linguagem Científica. A atribuição da classificação de zero pontos no parâmetro (A) implica a atribuição de zero pontos no parâmetro (B).

Nos itens em que os critérios de classificação se apresentam organizados por etapas, a classificação a atribuir à resposta resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de classificação definidos para situações específicas.

As respostas que não apresentem exatamente os termos ou expressões constantes nos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso obrigatório das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação, num referencial, do gráfico da função ou dos gráficos das funções visualizados.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de construção cujos critérios se apresentam organizados por etapas.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelos documentos curriculares de referência da disciplina (ver nota 1). O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplos: «sem recorrer à calculadora», «recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, a pontuação é atribuída de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal, na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).

9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada.  Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade em que, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

**Nota 1** – A título de exemplo, faz-se notar que não são aceites processos de resolução que envolvam a aplicação da regra de Cauchy, da regra de L'Hôpital ou de resultados da teoria de matrizes.

**Nota 2** – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

## CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

1. .... 12 pontos  
(C)

2.1. .... 14 pontos

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

Designemos por  $A$  o acontecimento «o candidato é violinista» e por  $B$  o acontecimento «o candidato é português».

### 1.º Processo

Apresentar uma tabela de dupla entrada cujas entradas sejam:

$A$  e  $\bar{A}$  ;  $B$  e  $\bar{B}$  ..... 1 ponto

Identificar o valor pedido com  $P(B|A)$  ..... 1 ponto

Reconhecer que  $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$  ..... 1 ponto

Preencher a célula da tabela relativa a  $P(A) \left(\frac{3}{5}\right)$  ..... 1 ponto

Preencher a célula da tabela relativa a  $P(B) \left(\frac{1}{2}\right)$  ..... 1 ponto

Preencher a célula da tabela relativa a  $P(\bar{B}) \left(\frac{1}{2}\right)$  ..... 1 ponto

Reconhecer que  $P(\bar{A}|\bar{B}) = \frac{3}{10}$  ..... 1 ponto

Preencher a célula da tabela relativa a  $P(\bar{A} \cap \bar{B}) \left(\frac{3}{20}\right)$  ..... 2 pontos

Preencher a célula da tabela relativa a  $P(A \cap B) \left(\frac{1}{4}\right)$  ..... 3 pontos

Obter o valor pedido  $\left(\frac{5}{12}\right)$  ..... 2 pontos

### 2.º Processo

Escrever  $P(A) = \frac{3}{5}$  ..... 1 ponto

Reconhecer que  $P(\bar{B}) = P(B)$  ..... 1 ponto

Escrever  $P(\bar{B}) = \frac{1}{2}$  ..... 1 ponto

Escrever  $P(\bar{A}|\bar{B}) = \frac{3}{10}$  ..... 1 ponto

Identificar o valor pedido com  $P(B|A)$  ..... 1 ponto

Reconhecer que  $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$  ..... 1 ponto

Obter  $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{3}{20}$  ..... 2 pontos

Reconhecer que  $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A} \cup \bar{B})$  ..... 1 ponto

Obter  $P(A \cup B) = \frac{17}{20}$  ..... 1 ponto

Obter  $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$  ..... 2 pontos

Obter o valor pedido  $\left(\frac{5}{12}\right)$  ..... 2 pontos

2.2. .... 12 pontos

(B)

2.3. .... 14 pontos

Reconhecer que os tempos de prática, em minutos, da Constança, em cada um dos dias, são termos consecutivos de uma progressão aritmética,  $(u_n)$ , de razão 10 ..... 2 pontos

Reconhecer que  $u_4 = u_1 + 30$  ..... 2 pontos

Obter  $u_1 = 30$  ..... 1 ponto

Escrever  $u_m = 20 + 10m$  (ou equivalente) ..... 3 pontos

Reconhecer que 2970 é a soma de  $m$  termos consecutivos de  $(u_n)$  ..... 2 pontos

Escrever  $2970 = \frac{10m + 50}{2} \times m$  (ou equivalente) ..... 2 pontos

Obter o valor pedido (22) ..... 2 pontos

3.1. .... 12 pontos

(A)

3.2. .... 14 pontos

Reconhecer que as coordenadas do ponto  $B$  são da forma  $(a, 2a, b)$  ..... 1 ponto

Determinar as coordenadas do ponto  $B$   $((1, 2, -5))$  ..... 2 pontos

Escrever as coordenadas do vetor  $\vec{OA}$  ..... 1 ponto

Escrever as coordenadas do vetor  $\vec{OB}$  ..... 1 ponto

Calcular  $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$  (11) ..... 2 pontos

Determinar a norma do vetor  $\vec{OA}$   $(\sqrt{41})$  ..... 1 ponto

Determinar a norma do vetor  $\vec{OB}$   $(\sqrt{30})$  ..... 1 ponto

Escrever  $11 = \sqrt{41} \times \sqrt{30} \times \cos(\hat{AOB})$  (ou equivalente) ..... 3 pontos

Obter o valor pedido  $(72^\circ)$  ..... 2 pontos

3.3. .... 14 pontos

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

**1.º Processo**

Apresentar o número de casos possíveis ( ${}^4C_2 \times {}^4C_2$ ) ..... 6 pontos

Apresentar o número de casos favoráveis ( $4 \times ({}^4C_2 - 1) + 2 \times {}^4C_2$ ) ... (3 + 3) ... 6 pontos

Obter o valor pedido  $\left(\frac{8}{9}\right)$  (ver nota) ..... 2 pontos

**2.º Processo**

Reconhecer que a probabilidade pedida é a probabilidade do acontecimento contrário ao acontecimento «os quatro vértices selecionados pertencem a uma mesma face» ..... 2 pontos

Calcular a probabilidade de os quatro vértices pertencerem a uma mesma face .... 10 pontos

Apresentar o número de casos possíveis ( ${}^4C_2 \times {}^4C_2$ ) ..... 4 pontos

Apresentar o número de casos favoráveis (4) ..... 4 pontos

Obter a probabilidade  $\left(\frac{1}{9}\right)$  (ver nota) ..... 2 pontos

Obter o valor pedido  $\left(\frac{8}{9}\right)$  (ver nota) ..... 2 pontos

**Nota** – Se a etapa relativa ao número de casos possíveis e a etapa relativa ao número de casos favoráveis tiverem sido pontuadas com 0 pontos, a pontuação a atribuir a esta etapa é 0 pontos. A mesma pontuação de 0 pontos deve ser atribuída caso o valor obtido não pertença ao intervalo  $[0, 1]$ .

4. .... 14 pontos

Reconhecer que o domínio de resolução da condição é  $]0, +\infty[$  ..... 1 ponto

Obter  $\ln x > -1 \wedge \ln x < 2$  ..... 9 pontos

Escrever  $\ln^2 x - \ln x - 2 = 0$  (ou equivalente) ..... 2 pontos

Obter  $\ln x = -1 \vee \ln x = 2$  ..... 3 pontos

Concluir que  $\ln x \in ]-1, 2[$  (ou equivalente) ..... 4 pontos

Obter  $x > e^{-1} \wedge x < e^2$  ..... 2 pontos

Apresentar o conjunto pedido  $\left(\left]\frac{1}{e}, e^2\right[, \text{ ou equivalente}\right)$  ..... 2 pontos

**5.1. .... 14 pontos**

- Determinar  $g'(x)$  em  $]1, +\infty[$  (**ver nota 1**) ..... 3 pontos
- Escrever  $g'(x) = 0$  ..... 1 ponto
- Determinar o zero de  $g'$  em  $]1, +\infty[$  ..... 2 pontos
- Apresentar um quadro de sinal de  $g'$  e de monotonia de  $g$  no intervalo  $]1, +\infty[$  (ou equivalente) ..... 4 pontos
- Apresentar os intervalos de monotonia de  $g$  em  $]1, +\infty[$  (**ver nota 2**) ..... 2 pontos
- Reconhecer que  $g(2)$  é um extremo relativo ..... 1 ponto
- Determinar  $g(2)$  ( $-2 - 2 \ln 2$ , ou equivalente) ..... 1 ponto

**Notas:**

1. Se for evidente a intenção de determinar a derivada da função, a pontuação mínima a atribuir a esta etapa é 1 ponto.
2. Se for referido que a função  $g$  é decrescente em  $]1, 2[$ , em vez de  $]1, 2]$ , e crescente em  $]2, +\infty[$ , em vez de  $[2, +\infty[$ , esta etapa deve ser considerada cumprida.

**5.2. .... 14 pontos**

- Reconhecer que  $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$  (ou  $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = g(1)$ ) ..... 1 ponto
- Determinar  $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$  (ou  $g(1)$ ) ..... 2 pontos
- Reconhecer que  $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 3x - 2 \ln x)$   
(ou substituir  $x$  por 1 na expressão  $x^2 - 3x - 2 \ln x$ ) ..... 1 ponto
- Obter  $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = -2$  (ou  $g(1) = -2$ ) ..... 1 ponto
- Determinar  $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)$  ..... 9 pontos
- Reconhecer que  $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left( \frac{1-x}{e^{x-1}-1} - e^{x-k} \right)$  ..... 1 ponto
- Escrever  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \left( \frac{1-x}{e^{x-1}-1} - e^{x-k} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-x}{e^{x-1}-1} - \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{x-k}$  .. 1 ponto
- Escrever  
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-x}{e^{x-1}-1} - \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{x-k} = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{-y}{e^y-1} - e^{1-k}$  ..... 3 pontos
- Escrever  $\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{-y}{e^y-1} - e^{1-k} = - \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{e^y-1}{y}} - e^{1-k}$  ..... 2 pontos
- Obter  $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = -1 - e^{1-k}$  ..... 2 pontos
- Escrever  $-1 - e^{1-k} = -2$  ..... 1 ponto
- Obter o valor de  $k$  (1) ..... 1 ponto

6. .... 12 pontos

I → b) II → c) III → b) IV → a)

Este item deve ser classificado de acordo com os níveis de desempenho seguintes.

Nível	Descritor de desempenho	Pontuação
3	Completa corretamente as 4 frases.	12
2	Completa corretamente 3 frases.	8
1	Completa corretamente 2 frases.	4

7. .... 14 pontos

Justificar que apenas a reta de equação  $x = 0$  pode ser assíntota vertical ao gráfico da função  $f$  ..... 1 ponto

Determinar  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  ..... 11 pontos

Escrever  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^4}$  ..... 1 ponto

Escrever  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^4 (1 + \cos x)}$  ..... 3 pontos

Escrever  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^4 (1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^4 (1 + \cos x)}$  ..... 1 ponto

Escrever  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^4 (1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^4 (1 + \cos x)}$  ..... 1 ponto

Escrever  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^4 (1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 (1 + \cos x)}$  ..... 1 ponto

Escrever  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right)^2$  ..... 1 ponto

Obter  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = 1$  ..... 1 ponto

Obter  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 (1 + \cos x)} = +\infty$  ..... 1 ponto

Concluir que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$  ..... 1 ponto

Concluir que a reta de equação  $x = 0$  é assíntota vertical ao gráfico de  $f$  ..... 2 pontos



8. .... 14 pontos

Tópicos de resposta

- Justificação da falsidade da proposição I.

Exemplo: A função  $f$  não é contínua no intervalo  $[1, 3]$ , pois  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  não existe (ou a função  $f$  não é contínua em  $x = 2$ ). Portanto, não é possível concluir que a função  $f$  tem, pelo menos, um zero no intervalo  $]1, 3[$  por aplicação do teorema de Bolzano-Cauchy.

- Justificação da falsidade da proposição II.

Exemplo: Como  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{f(2)}$  e  $\frac{1}{f(2)}$  é um número real, e como  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{f(x)} = 0$ , a reta de equação  $x = 2$  não é assíntota ao gráfico da função  $\frac{1}{f}$ .

Parâmetro	Nível	Descritor de desempenho	Pontuação
<b>A</b> Conteúdos	4	Apresenta, de forma completa, as duas justificações solicitadas.	12
	3	Apresenta, de forma completa, uma das justificações solicitadas e, de forma incompleta, a outra justificação.	9
	2	Apresenta, de forma completa, apenas uma das justificações solicitadas. OU Apresenta, de forma incompleta, as duas justificações solicitadas.	6
	1	Apresenta, de forma incompleta, apenas uma das justificações solicitadas.	3
<b>B</b> Linguagem Científica	2	Utiliza adequadamente o vocabulário específico da Matemática.	2
	1	Utiliza, embora com uma ou mais falhas, o vocabulário específico da Matemática.	1

9. .... 14 pontos

- Reconhecer que a área do trapézio  $[OBCD]$  é dada por  $\frac{\overline{BC} + \overline{DO}}{2} \times \overline{CD}$  ... 1 ponto
- Reconhecer que a abcissa do ponto  $B$  é  $2 \cos \alpha$  ..... 1 ponto
- Reconhecer que a ordenada do ponto  $B$  é  $2 \sin \alpha$  ..... 1 ponto
- Reconhecer que a abcissa do ponto  $C$  é  $-2 \cos \alpha$  ..... 1 ponto
- Reconhecer que a abcissa do ponto  $D$  é  $-2 \cos \alpha$  ..... 1 ponto
- Obter  $\overline{BC}$  em função de  $\alpha$  ..... 2 pontos
- Escrever  $\overline{DO}$  em função de  $\alpha$  ..... 1 ponto
- Reconhecer que a altura do trapézio é igual a  $2 \sin \alpha$  ..... 1 ponto
- Escrever uma expressão para a área do trapézio em função de  $\alpha$  ..... 2 pontos
- Obter a expressão pretendida ..... 3 pontos

10. .... 14 pontos

Reconhecer que  $2\theta_1$  é a amplitude do maior dos dois valores distintos de  $\theta$  ... 4 pontos

Apresentar a equação  $F(\theta) = F(2\theta)$  (ou uma equação equivalente) ..... 10 pontos

11. .... 12 pontos

(C)

12. .... 14 pontos

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

### 1.º Processo

Identificar  $i^7$  com  $-i$  ..... 1 ponto

Obter  $z = 2 - 4i$  ..... 3 pontos

Escrever  $z \times w = 5\sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{4}}$  ..... 3 pontos

Obter  $z \times w = -5 - 5i$  ..... 3 pontos

Escrever  $w = \frac{-5-5i}{2-4i}$  ..... 1 ponto

Obter  $w = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$  ..... 3 pontos

### 2.º Processo

Seja  $w = a + bi$ .

Identificar  $i^7$  com  $-i$  ..... 1 ponto

Obter  $z = 2 - 4i$  ..... 3 pontos

Obter  $z \times w = 2a + 4b + i(2b - 4a)$  ..... 1 ponto

Escrever  $2a + 4b = 2b - 4a$  ..... 1 ponto

Obter  $b = -3a$  (ou equivalente) ..... 1 ponto

Obter  $z \times w$ , com a parte real e com a parte imaginária em função de  $a$  (ou em função de  $b$ ) ..... 2 pontos

Obter  $|z \times w|$  em função de  $a$  (ou em função de  $b$ ) ..... 2 pontos

Obter o valor de  $a$  e o valor de  $b$  ..... 2 pontos

Escrever o número complexo  $w \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \right)$  ..... 1 ponto

13. .... 14 pontos

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

**1.º Processo**

Seja  $a$  a abcissa do ponto de tangência.

Obter  $f'(x)$  (**ver nota**) ..... 2 pontos

Reconhecer que  $m = f'(a)$  ..... 2 pontos

Obter  $f'(a) = 4a + b$  ..... 1 ponto

Escrever  $2a^2 + ba + 5 = (4a + b)a + 1$  (ou equivalente) ..... 4 pontos

Resolver a equação anterior ..... 3 pontos

Apresentar o valor pedido ( $\sqrt{2}$ ) ..... 2 pontos

**Nota** – Se for evidente a intenção de determinar a derivada da função, a pontuação mínima a atribuir a esta etapa é 1 ponto.

**2.º Processo**

Reconhecer que a reta é tangente ao gráfico de  $f$  se a equação  $2x^2 + bx + 5 = mx + 1$  tiver apenas uma solução ..... 3 pontos

Obter  $2x^2 + (b - m)x + 4 = 0$  (ou equivalente) ..... 2 pontos

Escrever  $(b - m)^2 - 32 = 0$  ..... 3 pontos

Obter  $b - m = -\sqrt{32}$   $\vee$   $b - m = \sqrt{32}$  ..... 2 pontos

Obter  $x = -\sqrt{2}$   $\vee$   $x = \sqrt{2}$  (ou equivalente) ..... 2 pontos

Apresentar o valor pedido ( $\sqrt{2}$ , ou equivalente) ..... 2 pontos

**COTAÇÕES**

As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	1.	2.1.	2.2.	3.1.	3.2.	5.1.	5.2.	6.	8.	10.	11.	13.	Subtotal
Cotação (em pontos)	12	14	12	12	14	14	14	12	14	14	12	14	158
Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	2.3.	3.3.	4.	7.	9.	12.	Subtotal						
Cotação (em pontos)	3 x 14 pontos												42
<b>TOTAL</b>													200