REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E INOVAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2024

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 62/2023, de 25 de julho

Entrelinha 1,5 sem figuras

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 12 Páginas

---

A prova inclui 12 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 6 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: $Semiperímetro \times Apótema$

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \, \cos b + \operatorname{sen} b \, \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \, \cos b - \operatorname{sen} a \, \operatorname{sen} b$

Complexos

$(\rho\, e^{i\theta})^n = \rho^n\, e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho\, e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\; e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ $\quad (k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -\,u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

Item obrigatório

1. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$ e contradomínio $[-1, 3]$.

Qual é o contradomínio da função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = f(x-2)+1$?

a) $[-3, 1]$

b) $[-2, 2]$

c) $[0, 4]$

d) $[1, 5]$

2. Uma orquestra está a realizar audições para novos instrumentistas.

Item obrigatório

2.1. No primeiro dia das audições, participaram apenas candidatos a flautistas e a violinistas.

Sabe-se que:

- $\frac{3}{5}$ dos candidatos eram violinistas;
- o número de candidatos estrangeiros era igual ao número de candidatos portugueses;
- $\frac{3}{10}$ dos candidatos estrangeiros eram flautistas.

Seleciona-se, ao acaso, um dos candidatos que participaram no primeiro dia das audições.

Determine a probabilidade de esse candidato ser português, sabendo-se que é violinista.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

Item obrigatório

2.2. Enquanto aguardam as audições, quatro violinistas, um violoncelista e três contrabaixistas vão sentar-se nas duas primeiras filas de uma plateia, tendo cada fila quatro lugares numerados de 1 a 4.

Qual das expressões seguintes representa o número de maneiras diferentes de dispor os oito músicos, ficando os três contrabaixistas numa fila?

a) ${}^4C_3 \times 3! \times 5!$

b) $2 \times {}^4A_3 \times 5!$

c) $2 \times {}^4C_3 \times 5!$

d) ${}^4A_3 \times 3 \times 5!$

2.3. Para se preparar para a audição de violino, a Constança praticou durante m dias.

Sabe-se que a Constança praticou:

- em cada dia, exceto no primeiro, sempre mais 10 minutos do que no dia anterior;
- 60 minutos no quarto dia;
- 2970 minutos no total dos m dias.

Determine o valor de m.

3. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, o cubo $[ABCDEFGH]$.

Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(4, -4, -3)$;
- o ponto B tem a ordenada igual ao dobro da abcissa;
- a aresta $[BC]$ está contida na reta r definida pela equação vetorial $(x, y, z) = (3, 5, 1) + k(2, 3, 6), \quad k \in \mathbb{R}$.

Item obrigatório

3.1. Qual das equações seguintes é uma equação do plano perpendicular à reta r que passa no ponto A ?

a) $2x + 3y + 6z + 22 = 0$

b) $2x + 3y + 6z - 20 = 0$

c) $3x - 2y - 20 = 0$

d) $3x - 2y + 22 = 0$

Item obrigatório

3.2. Determine a amplitude do ângulo convexo AOB .

Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.

3.3. Selecionam-se, ao acaso, dois vértices da face $[ABCD]$ do cubo e dois vértices da face oposta à face $[ABCD]$.

Determine a probabilidade de os quatro vértices selecionados não pertencerem a uma mesma face do cubo.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

4. Determine o conjunto dos números reais que verificam a condição $\ln^2 x - \ln x - 2 < 0$.

Apresente a sua resposta na forma de intervalo ou de reunião de intervalos de números reais.

5. Considere, para um certo valor de k real, a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1-x}{e^{x-1}-1}-e^{x-k} & \text{se } x<1\\[2ex] x^2-3x-2\ln x & \text{se } x\geq 1\end{cases}$$

__Item obrigatório__

5.1. Estude, no intervalo $]1,+\infty[$, a função g quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, e determine, caso existam, esses extremos.

Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia.

__Item obrigatório__

5.2. Sabe-se que a função g é contínua em $x=1$.

Determine o valor de k.

Item obrigatório

6. Na tabela seguinte, a primeira coluna (CF) apresenta as classificações finais, em valores, na disciplina de Português, dos 20 alunos de uma turma, e a segunda coluna (FR) as respetivas frequências relativas, em percentagem.

CF	FR
8	5
10	15
12	10
13	20
14	25
17	20
20	5

Complete cada uma das frases seguintes, selecionando a opção correta, de acordo com os dados apresentados na tabela anterior.

Escreva, na folha de respostas, apenas cada um dos números, **I**, **II**, **III** e **IV**, seguido da opção, **a)**, **b)** ou **c)**, selecionada. A cada espaço corresponde uma só opção.

Na turma, há ___**I**___ alunos com classificação final inferior a 13 valores na disciplina de Português.

a) 4

b) 6

c) 10

A mediana da distribuição das classificações finais na disciplina de Português é ___**II**___ valores.

a) $12{,}5$

b) 13

c) $13{,}5$

A classificação média final na disciplina de Português é ___**III**___ valores.

a) $13{,}4$

b) $13{,}6$

c) $13{,}8$

O desvio padrão da distribuição das classificações finais na disciplina de Português é ___**IV**___ valores.

a) $2{,}9$

b) $3{,}8$

c) $4{,}1$

7. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^4}$$

Estude a função f quanto à existência de assíntotas verticais ao seu gráfico e, caso existam, escreva as respetivas equações.

Item obrigatório

8. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$.

Sabe-se que:

- para qualquer número real a, $a \neq 2$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$;
- $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = f(2)$, com $f(2) > 0$, e $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$;
- $f(1) \times f(3) < 0$.

Considere as proposições seguintes.

I. O teorema de Bolzano-Cauchy permite afirmar que a função f tem, pelo menos, um zero no intervalo $]1, 3[$.

II. A reta de equação $x = 2$ é assíntota ao gráfico da função $\frac{1}{f}$.

Justifique que as proposições **I** e **II** são falsas.

Na sua resposta, apresente, para cada uma das proposições, uma razão que justifique a sua falsidade.

9. Considere, num referencial o.n. Oxy , a circunferência de centro em O e raio 2 , o ponto A e o trapézio $[OBCD]$.

Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(2, 0)$;
- o ponto B pertence à circunferência e é tal que o ângulo orientado AOB tem amplitude α , em radianos, com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$;
- o ponto C é o simétrico de B , em relação ao eixo Oy ;
- o ponto D pertence ao eixo Ox e tem a mesma abcissa do ponto C .

Mostre que a área do trapézio $[OBCD]$ é dada, em função de α , pela expressão

$$3\,\mathrm{sen}\,(2\alpha)$$

<u>**Item obrigatório**</u>

10. Uma caixa vai ser puxada ao longo de um plano horizontal, com recurso a uma haste rígida, fixada à caixa.

Seja θ a amplitude, em radianos, do ângulo que a força faz com a horizontal, $\left(\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$.

Admita que, para cada valor de θ , a intensidade mínima da força a aplicar no ponto B , para que se inicie o movimento da caixa, é dada, em newton, por

$$F(\theta) = \frac{4095}{5\,\mathrm{sen}\,\theta + 12\cos\theta}$$

Existem dois valores distintos de θ aos quais corresponde a mesma intensidade mínima da força, em newton, a aplicar no ponto B , para que se inicie o movimento da caixa.

Sabe-se que um desses valores é o dobro do outro.

Seja θ_1 o menor desses valores $\left(\theta_1 \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[\right)$.

Apresente uma equação que lhe permita determinar o valor de θ_1 .

Não resolva a equação.

Item obrigatório

11. No plano complexo, o ponto A é o afixo de uma das raízes cúbicas de um certo número complexo, w.

Sabe-se que o ponto A pertence à circunferência de raio 2 centrada na origem do referencial e ao semieixo imaginário negativo.

Em qual das seguintes opções se apresenta w, escrito na forma trigonométrica?

a) $2e^{i\frac{\pi}{2}}$

b) $2e^{i\frac{3\pi}{2}}$

c) $8e^{i\frac{\pi}{2}}$

d) $8e^{i\frac{3\pi}{2}}$

12. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere o número complexo $z = \frac{4}{1+i} - \frac{2}{i^7}$.

Determine o número complexo w tal que o número complexo $z \times w$ tenha módulo $5\sqrt{2}$ e afixo pertencente à bissetriz do terceiro quadrante.

Apresente w na forma $a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

Item obrigatório

13. Para certos valores reais de b e de m, não nulos, a reta de equação $y = mx + 1$ é tangente ao gráfico da função quadrática definida por $f(x) = 2x^2 + bx + 5$ num ponto cuja abcissa é positiva.

Determine a abcissa desse ponto.

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.

1.	12 pontos
2.1.	14 pontos
2.2.	12 pontos
3.1.	12 pontos
3.2.	14 pontos
5.1.	14 pontos
5.2.	14 pontos
6.	12 pontos
8.	14 pontos
10.	14 pontos
11.	12 pontos
13.	14 pontos
Subtotal	**158 pontos**

Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

2.3.	14 pontos
3.3.	14 pontos
4.	14 pontos
7.	14 pontos
9.	14 pontos
12.	14 pontos
Subtotal	**42 pontos**

TOTAL .... **200 pontos**