REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E INOVAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática B

Prova 735 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2024

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 62/2023, de 25 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 13 Páginas

---

A prova inclui 9 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 5 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, apenas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente, consoante a situação, todos os elementos relevantes visualizados, como:

- os gráficos obtidos, em referencial cartesiano, com os pontos relevantes para a resolução assinalados (por exemplo, pontos de intersecção de gráficos, pontos de máximos e pontos de mínimos);
- as linhas da tabela obtida que são relevantes para a resolução;
- as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r}{180}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\ maior \times Diagonal\ menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\ maior + Base\ menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: $Semiperímetro \times Apótema$

Sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r^2}{360}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$ (r – raio)

Área lateral de um cilindro reto: $2 \pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Cone: $\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Cilindro: $Área\ da\ base \times Altura$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

- **Progressão aritmética:** $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$
- **Progressão geométrica:** $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Probabilidades e Estatística

Se X é uma variável aleatória discreta de valores x_i com probabilidade p_i, então:

- **Valor médio** de X:
  $\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$
- **Desvio padrão** de X:
  $\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é uma variável aleatória normal de valor médio μ e desvio padrão σ, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

* **1.** Considere o seguinte problema de programação linear.

«Uma empresa pretende colocar no mercado dois tipos de molho agridoce: A e B.

A produção de uma embalagem do molho A necessita de 2 litros de mel, de 1 litro de vinagre e de 1 litro de molho de soja.

A produção de uma embalagem do molho B necessita de 1 litro de mel, de 2 litros de vinagre e de 1 litro de molho de soja.

Para a produção destes molhos, a empresa dispõe de 24 litros de mel e de 24 litros de vinagre. Devem ser utilizados na produção dos dois tipos de molhos, pelo menos, 14 litros de molho de soja.»

Seja x o número de embalagens do molho A e seja y o número de embalagens do molho B a produzir pela empresa.

Complete o sistema de restrições deste problema de programação linear, selecionando, para cada espaço (**I**, **II** e **III**), o sinal correto $(<,\ \leq,\ =,\ \geq,\ >)$.

Escreva, na folha de respostas, apenas cada um dos números, **I**, **II** e **III**, seguido do sinal selecionado.

$$\begin{cases} 2x + y \ \underline{\ \mathbf{I}\ }\ 24 \\ x + 2y \ \underline{\ \mathbf{II}\ }\ 24 \\ x + y \ \underline{\ \mathbf{III}\ }\ 14 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

*** 2.** A vespa-asiática, nativa do sudeste asiático, é considerada uma espécie invasora no continente europeu e tem sido amplamente referida como uma predadora eficaz da abelha-do-mel e de outros polinizadores.

Considere que, no início do dia 1 de janeiro de 2017, a presença desta espécie foi detetada, pela primeira vez, numa região com $57\,000\ \mathrm{km}^2$ de área.

A percentagem, P, desta área, afetada pela presença da vespa-asiática, x anos após o dia 1 de janeiro de 2017, é bem modelada por

$$P(x) = \frac{86{,}8}{1 + 9{,}85\, e^{-0{,}5x}} \quad , \quad \text{com } x \geq 0$$

Complete o texto, de acordo com o modelo apresentado, selecionando a opção correta para cada espaço.

Escreva, na folha de respostas, apenas cada um dos números, **I**, **II** e **III**, seguido da opção, **a)**, **b)** ou **c)**, selecionada.

«A percentagem daquela área, afetada pela presença da vespa-asiática, no início do dia 1 de janeiro de 2017, era de ____**I**____ e, com o passar do tempo, a área afetada tende para ____**II**____.

No dia 1 de janeiro de 2024, a percentagem daquela área, afetada pela presença da vespa-asiática, era ____**III**____ a 50%.»

I	**II**	**III**
a) 8% **b)** $12{,}4\%$ **c)** $86{,}8\%$	**a)** $86{,}8\ \mathrm{km}^2$ **b)** $46\,170\ \mathrm{km}^2$ **c)** $49\,476\ \mathrm{km}^2$	**a)** igual **b)** superior **c)** inferior

3. Admita que uma abelha executa um voo perto da sua colmeia.

Seja d a função que dá a distância, em metros, entre a posição da abelha e uma entrada da sua colmeia, t segundos após o início do voo.

Seja V a função que dá a taxa de variação instantânea da função d, para cada instante t.

Interprete, no contexto descrito, o significado de $V(4) = -0{,}5$.

*** 4.** A tabela seguinte foi elaborada com base em dados recolhidos no portal do Instituto Nacional de Estatística e apresenta o número de colmeias e cortiços povoados em Portugal, em milhares, e a respetiva produção de mel, em toneladas, para alguns anos, entre 1989 e 2009.

Ano	N.º de colmeias e cortiços povoados (em milhares)	Produção de mel (em toneladas)
1989	366	3280
1993	295	4196
1995	244	3600
1997	239	3690
1999	285	4465
2003	228	7310
2005	188	5686
2007	164	6908
2009	196	6919

Com base nos dados da tabela, obteve-se um modelo de regressão linear, de y sobre x, em que x representa o número de colmeias e cortiços povoados, em milhares, e y representa a produção de mel, em toneladas.

Considere a seguinte afirmação:

> «No ano de 2016, foram contabilizados 179 milhares de colmeias e cortiços povoados, e a produção de mel atingiu $14\,246$ toneladas, pelo que o valor da produção de mel foi cerca de $\mathbf{2{,}2}$ **vezes maior** do que o valor estimado pelo modelo de regressão linear.»

Justifique que esta afirmação é verdadeira.

Na sua resposta, apresente os valores dos parâmetros da equação da reta de regressão linear de y sobre x, arredondados às centésimas.

5. Na Figura 1, apresenta-se uma fotografia de um alojamento, destinado a acomodar participantes em festivais, cuja forma sugere os favos de uma colmeia.

Figura 1

A estrutura deste alojamento é constituída por seis módulos iguais para dormidas e dois módulos iguais para arrumos.

No esquema da Figura 2, que não está à escala, está representado o sólido geométrico referente à estrutura do alojamento, constituído por seis prismas hexagonais regulares retos e dois prismas quadrangulares retos, justapostos, com a mesma altura, estando as bases sombreadas contidas num mesmo plano vertical. As bases dos prismas quadrangulares retos são trapézios isósceles.

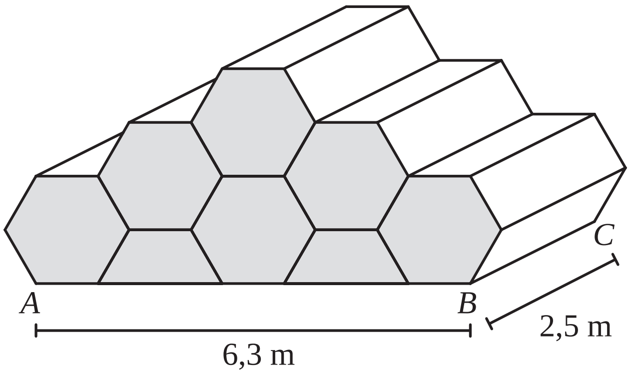

Figura 2

Sabe-se que:

- A, B e C são vértices de prismas da estrutura;
- $\overline{AB} = 6{,}3 \text{ m}$ e $\overline{BC} = 2{,}5 \text{ m}$.

Note que a base maior dos trapézios isósceles é o dobro da sua base menor.

5.1. Determine o volume do sólido representado na Figura 2.

Apresente o resultado em metros cúbicos, arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

* **5.2.** Num dos prismas hexagonais representados na Figura 2, fixou-se um referencial ortogonal e monométrico, $Oxyz$, como se representa na Figura 3.

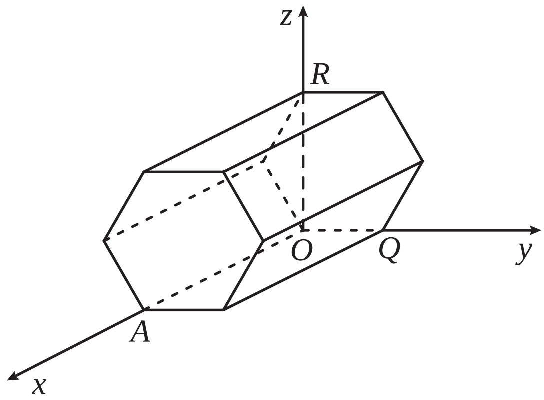

Figura 3

No referencial, a unidade é o metro, e o ponto O é um vértice do prisma.

Os pontos A, Q e R são vértices do prisma e pertencem, respetivamente, aos semieixos positivos Ox, Oy e Oz.

Qual das seguintes equações define um plano que decompõe o prisma em dois sólidos geometricamente iguais?

(A) $x = 2,5$ **(B)** $y = 2,5$ **(C)** $x = 1,25$ **(D)** $y = 1,25$

6. Uma dada empresa dedica-se à produção e à comercialização de água-mel, sendo esta comercializada em frascos de vidro.

* **6.1.** Considere a variável aleatória «quantidade de água-mel, em ml, de um frasco comercializado». Admita que esta variável aleatória segue, aproximadamente, uma distribuição normal de valor médio 300 ml.

Sabe-se que 90% dos frascos comercializados têm entre 295 ml e 305 ml de água-mel.

Tira-se, ao acaso, um dos frascos comercializados.

Qual é a probabilidade de esse frasco ter menos do que 295 ml de água-mel?

(A) $0{,}05$ **(B)** $0{,}10$ **(C)** $0{,}30$ **(D)** $0{,}45$

* **6.2.** Os frascos em que a empresa comercializa a água-mel têm a forma de um prisma hexagonal regular reto. A Figura 4 é uma fotografia de um desses frascos.

No processo de enchimento dos frascos, estes são assentes, numa das suas faces retangulares, em cima de uma superfície plana horizontal.

Num certo instante inicial, um desses frascos contém alguma quantidade de água-mel, como se ilustra na Figura 5.

Figura 4

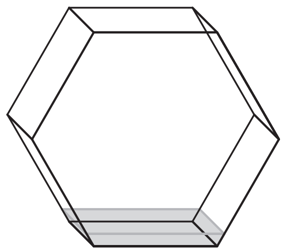

Figura 5

À medida que se enche o frasco, a superfície de água-mel tem sempre a forma de um retângulo, mas a sua área vai variando, como se representa na Figura 6.

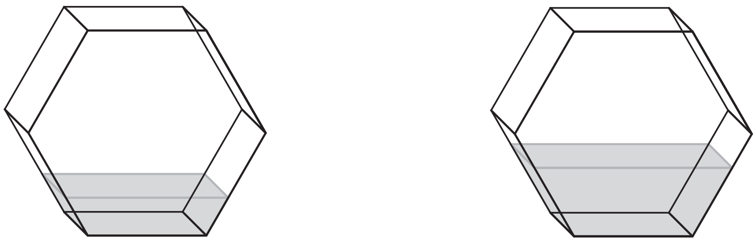

Figura 6

Admita que a quantidade, por segundo, de água-mel colocada no frasco é constante.

Relativamente ao intervalo de tempo em que decorreu o enchimento do frasco, seja f a função que faz corresponder o tempo, t, em segundos, decorrido desde o instante inicial, à área da superfície de água-mel no frasco.

Na Figura 7, estão representados dois gráficos, A e B, em referencial cartesiano ortogonal.

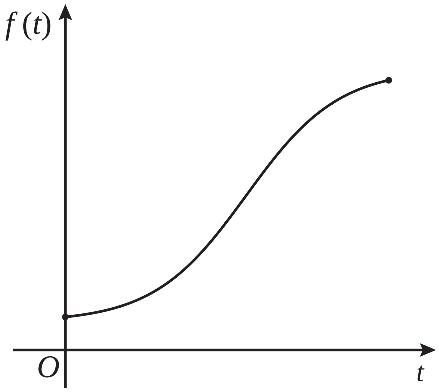

Gráfico A

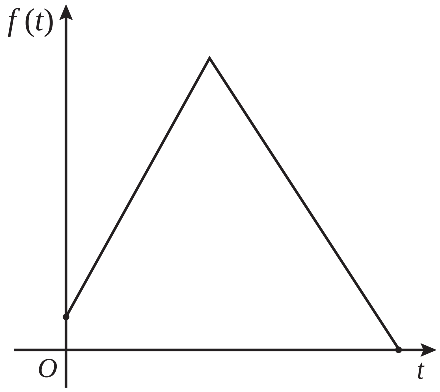

Gráfico B

Figura 7

Justifique que nem o gráfico A nem o gráfico B podem representar a função f.

Apresente uma razão para cada um dos gráficos.

7. Duas transportadoras de mercadorias, A e B, operam com os tarifários seguintes:

	Transportadora A	**Transportadora B**
Valor fixo	$9{,}50$ € / serviço	5 € / serviço
Valor variável	$0{,}60$ € / km	$0{,}85$ € / km

O preço a pagar pelo serviço de transporte engloba um valor fixo, por cada serviço, e um valor variável, em função da extensão do percurso entre o ponto de recolha e o ponto de entrega.

* **7.1.** Em qual das transportadoras é menor o preço a pagar se a extensão do percurso for de $10\ \text{km}$?

Mostre como chegou à sua resposta.

7.2. A empresa produtora de mel pretende contratar uma destas transportadoras para levar o seu produto, do armazém a uma feira.

De acordo com os tarifários apresentados para o mesmo percurso, a empresa verificou, corretamente, que o preço a pagar pelo serviço em ambas as transportadoras é igual.

Qual é a extensão, em km , do percurso entre o armazém da empresa e a feira?

Mostre como chegou à sua resposta.

8. Considere uma espiral constituída por 100 semicircunferências de diâmetros 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , e assim sucessivamente, tendo cada semicircunferência, a partir da segunda, mais 1 unidade de diâmetro do que a semicircunferência anterior, como se representa na Figura 8.

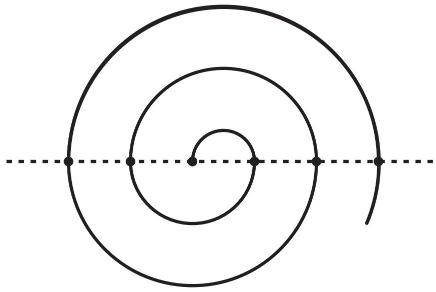

Figura 8

Considere a sequência crescente dos comprimentos das semicircunferências.

Os termos desta sequência são termos consecutivos de uma progressão aritmética.

Note que o comprimento de uma semicircunferência é igual a metade do perímetro de um círculo com o mesmo raio.

* **8.1.** Mostre que a razão dessa progressão aritmética é $\frac{\pi}{2}$.

8.2. Mostre que o comprimento total da espiral constituída pelas 100 semicircunferências é 2525π .

9. A Figura 9 é uma fotografia de um toldo que tem um dispositivo de suporte constituído por dois braços articulados que sustêm a lona, à medida que esta é enrolada ou desenrolada por meio de uma manivela.

Na Figura 10, está representado o dispositivo de suporte do toldo, em que a reta CD representa a parte fixa da estrutura numa parede.

Figura 9

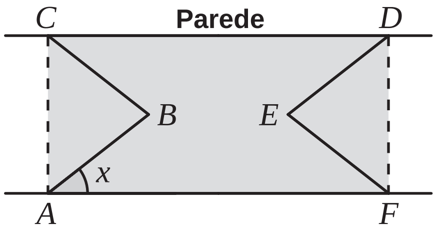

Figura 10

Sabe-se que:

- $[AFDC]$ é um retângulo;
- $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{DE} = \overline{EF} = 1{,}5 \text{ m}$;
- $F\hat{A}B = x$, em graus, com $x \in [0, 90]$.

9.1. Mostre que $\overline{AC}$, em metros, é dado por $3 \operatorname{sen} x$.

* **9.2.** Admita que, a cada 5 voltas completas da manivela no mesmo sentido, a amplitude x aumenta 6^{o} .

Num determinado instante, o toldo encontrava-se parcialmente aberto e, após 25 voltas completas da manivela, no mesmo sentido, $\overline{AC}$ aumentou 1 m .

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, a medida $\overline{AC}$, em metros, antes de se rodar a manivela.

Apresente o valor pedido, arredondado às centésimas.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

Note que $\overline{AC} = 3 \operatorname{sen} x$, em metros.

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 9 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.**	**2.**	**4.**	**5.2.**	**6.1.**	**6.2.**	**7.1.**	**8.1.**	**9.2.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	14	14	18	14	14	18	18	18	18	**146**
Destes 5 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**3.**	**5.1.**	**7.2.**	**8.2.**	**9.1.**					**Subtotal**
Cotação (em pontos)	3 × 18 pontos									**54**
TOTAL										**200**

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

Prova 735

1.ª Fase