



**Exame Final Nacional de Matemática A**  
**Prova 635 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2024**  
12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 62/2023, de 25 de julho

**Braille**

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

10 Páginas

---

A prova inclui 12 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 6 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

---

Para cada resposta, identifique o item.

Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de calculadora.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

---

---

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

---

# Formulário

---

## Geometria

### Comprimento de um arco de circunferência:

$\alpha r$  ( $\alpha$  – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;  $r$  – raio)

**Área de um polígono regular:**  $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

### Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$  ( $\alpha$  – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;  $r$  – raio)

**Área lateral de um cone:**  $\pi r g$  ( $r$  – raio da base;  $g$  – geratriz)

**Área de uma superfície esférica:**  $4\pi r^2$  ( $r$  – raio)

**Volume de uma pirâmide:**  $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

**Volume de um cone:**  $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

**Volume de uma esfera:**  $\frac{4}{3}\pi r^3$  ( $r$  – raio)

## Progressões

Soma dos  $n$  primeiros termos de uma progressão  $(u_n)$ :

**Progressão aritmética:**  $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

**Progressão geométrica:**  $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

## Trigonometria

$\text{sen}(a + b) = \text{sen} a \cos b + \text{sen} b \cos a$

$\text{cos}(a + b) = \text{cos} a \cos b - \text{sen} a \text{sen} b$

## Complexos

$(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$  ( $k \in \{0, \dots, n-1\}$  e  $n \in \mathbb{N}$ )

## Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u v)' = u' v + u v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' v - u v'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n u^{n-1} u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\text{sen } u)' = u' \cos u$$

$$(\text{cos } u)' = -u' \text{sen } u$$

$$(\text{tg } u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' e^u$$

$$(a^u)' = u' a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

## Limites notáveis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$

1. Considere, num referencial o.n.  $Oxyz$ , o cubo  $[ABCDEFGH]$ .

Sabe-se que:

- a face  $[ABCD]$  do cubo está contida no plano definido pela equação  $x = 0$ ;
- o ponto  $A$  pertence ao semieixo positivo  $Oy$ , e  $\overline{OA} = 4$ ;
- o ponto  $F$  pertence ao plano  $xOy$ ;
- a reta  $FC$  é definida pela equação vetorial  $(x, y, z) = (-5, 2, 14) + k(-5, -1, 7)$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

Item obrigatório

1.1. Qual das seguintes equações vetoriais define a reta que passa no ponto  $A$  e é paralela à reta  $FC$ ?

- a)  $(x, y, z) = (-5, 1, 7) + k(1, -5, 0)$ ,  $k \in \mathbb{R}$
- b)  $(x, y, z) = (5, 1, -7) + k(-1, 5, 0)$ ,  $k \in \mathbb{R}$
- c)  $(x, y, z) = (-10, 2, 14) + k(5, 1, -7)$ ,  $k \in \mathbb{R}$
- d)  $(x, y, z) = (10, 2, -14) + k(5, 1, -7)$ ,  $k \in \mathbb{R}$

Item obrigatório

1.2. Determine a equação cartesiana reduzida da superfície esférica de diâmetro  $[FC]$ .

2. De uma progressão aritmética  $(u_n)$ , sabe-se que a soma do primeiro com o quinto termo é igual a 26 e que o nono termo é igual a 31.

Averigue se 835 é termo da progressão  $(u_n)$ .

3. Considere, num referencial o.n.  $Oxy$ , o gráfico da função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}^+$ , definida por  $f(x) = \log_{2a} x$ , com  $a > 1$ , e o trapézio  $[ABCD]$ , de bases  $[AD]$  e  $[BC]$ .

Sabe-se que:

- os pontos  $A$  e  $B$  pertencem ao eixo  $Ox$  e têm abscissas  $a$  e  $a + 4$ , respetivamente;
- os pontos  $D$  e  $C$  pertencem ao gráfico de  $f$  e têm abscissas  $a$  e  $a + 4$ , respetivamente.

Determine o valor de  $a$  para o qual a área do trapézio  $[ABCD]$  é igual a 4.

Item obrigatório

4. Na tabela seguinte, apresentam-se os dados relativos à remuneração base média mensal, em euros, dos trabalhadores portugueses por conta de outrem, por sexo, em seis anos pertencentes ao período de 1995 a 2020. A primeira coluna ( $x$ ) diz respeito à remuneração base média mensal dos homens e a segunda coluna ( $y$ ) à remuneração base média mensal das mulheres.

Admita que a relação entre as variáveis  $x$  e  $y$  é, aproximadamente linear, sendo modelada pela reta de regressão de equação  $y = 0,947x - 109,691$ .

Anos	$x$	$y$
1995	542,8	416,8
2000	674,7	523,6
2005	832,5	672,0
2010	976,7	800,8
2015	990,1	825,0
2020	1109,2	960,3

Complete cada uma das frases seguintes, selecionando a opção correta para cada espaço, de acordo com os dados apresentados na tabela anterior.

Escreva, na folha de respostas, apenas cada um dos números, I, II, III e IV, seguido da opção, a), b) ou c), selecionada. A cada espaço corresponde uma só opção.

A mediana da remuneração base média mensal dos homens é \_\_\_\_\_ I \_\_\_\_\_ euros.

- a) 832,5
- b) 854,3
- c) 904,6

A amplitude interquartil da remuneração base média mensal dos homens é \_\_\_\_\_ II \_\_\_\_\_ euros.

- a) 315,4
- b) 440,9
- c) 566,4

De 2015 para 2020, a remuneração base média mensal das mulheres teve um aumento percentual igual a \_\_\_\_\_ III \_\_\_\_\_.

- a) 14,1
- b) 16,4
- c) 17,2

Sabendo que a remuneração base média mensal dos homens, em 2008, foi igual a 916,3 euros, pode estimar-se, de acordo com o modelo apresentado, que o valor da remuneração base média mensal das mulheres, nesse ano, arredondado às décimas, foi igual a IV euros.

- a) 699,8
- b) 736,4
- c) 758,0

5. Considere o triângulo  $[PRQ]$ , retângulo em  $R$ .

Seja  $\alpha$  a amplitude, em radianos, do ângulo  $QPR$ .

Sabe-se que:

- $\overline{PQ} = 6$  ;
- $\vec{QR} \cdot \vec{QP} = 27$  .

Determine o valor de  $\alpha$  .

6. Seja  $f$  uma função contínua, de domínio  $[0, +\infty[$ , com  $f(0) = 2$ , e seja  $g$  uma função, de domínio  $\mathbb{R}$ , definida, para um certo valor de  $k$  real, por

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \geq 0 \\ \frac{e^{-k}(e^x - 1)}{-x^2 + 2x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

#### Item obrigatório

6.1. A reta de equação  $y = 3x - 5$  é assíntota ao gráfico da função  $g$ , quando  $x \rightarrow +\infty$ .

Qual das seguintes igualdades é verdadeira?

- a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) + 3x) = -5$
- b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) + 3x) = 5$
- c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - 3x - 5) = 0$
- d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - 3x + 5) = 0$

#### Item obrigatório

6.2. Determine o valor de  $k$ , sabendo que a função  $g$  é contínua em  $x = 0$ .

7. Considere um dado cúbico equilibrado com as faces numeradas de 1 a 6 .

Item obrigatório

7.1. Lança-se esse dado três vezes e regista-se o número da face que ficou voltada para cima em cada lançamento.

Qual é a probabilidade de, em exatamente dois desses lançamentos, se obter, na face voltada para cima, um múltiplo de 3 ?

a)  $\frac{1}{27}$

b)  $\frac{2}{27}$

c)  $\frac{1}{9}$

d)  $\frac{2}{9}$

Item obrigatório

7.2. Considere todos os números naturais com seis algarismos diferentes que é possível formar usando os algarismos 1 , 2 , 3 , 4 , 5 e 6 , inscritos nas faces do dado.

Determine quantos desses números são pares, inferiores a trezentos mil, e com os algarismos 2 e 4 um ao lado do outro. Um número nestas condições é, por exemplo, 142 356 .

8. Seja  $E$  , conjunto finito, o espaço amostral associado a uma experiência aleatória, e sejam  $A$  e  $B$  dois acontecimentos ( $A \subset E$  e  $B \subset E$ ).

Sabe-se que:

•  $0 < P(A) < 1$  e  $0 < P(B) < 1$  ;

•  $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 9 P(A \cap B)$  ;

•  $P(\bar{A}) = 3 P(B)$  .

Determine o valor de  $P(A|B)$  .

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

Item obrigatório

9. Uma empresa que fabrica suspensões para veículos está a testar a elasticidade nas vibrações verticais de um certo tipo de mola.

Num dos testes, fixou-se uma das extremidades de uma mola numa bancada, e a extremidade livre foi alongada alguns centímetros acima da posição de equilíbrio (sentido positivo), tendo sido depois solta, o que provocou uma oscilação vertical desta extremidade.

Admita que o deslocamento,  $y$ , no sentido positivo, em centímetros, da extremidade livre da mola, em relação à posição de equilíbrio, no primeiro segundo, é dado, em cada instante  $t$ , em segundos, por

$$y(t) = 7,5e^{-1,5t} \operatorname{sen}(8,6t + 1,6), \text{ com } t \in [0, 1]$$

(o argumento da função seno está expresso em radianos).

Seja  $t_1$  o primeiro instante em que a extremidade livre da mola está meio centímetro abaixo da posição de equilíbrio.

Apresente uma equação que lhe permita determinar o valor de  $t_1$ .

Não resolva a equação.

Item obrigatório

10. Seja  $f$  uma função, de domínio  $\mathbb{R}^+$ , duas vezes diferenciável.

Relativamente à função  $f$ , sabe-se que:

- a função  $f'$ , derivada da função  $f$ , é estritamente crescente no intervalo  $]0, +\infty[$ ;
- $f'(1) = 2$ .

Considere as proposições seguintes.

I. O gráfico da função  $f$  pode ter concavidade voltada para baixo em  $\mathbb{R}^+$ .

II. No intervalo  $]1, 5[$ , a função  $f$  tem, pelo menos, um extremo.

Justifique que as proposições I e II são falsas.

Na sua resposta, apresente, para cada uma das proposições, uma razão que justifique a sua falsidade.

11. Seja  $g$  uma função diferenciável, de domínio  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ , cuja derivada,  $g'$ , é dada por

$$g'(x) = \cos(2x) + 2\sin x$$

Item obrigatório

11.1. Seja  $r$  a reta tangente ao gráfico de  $g$  no ponto de abscissa  $0$ , e seja  $s$  a reta paralela à reta  $r$  que intersecta o eixo  $Ox$  no ponto de abscissa  $4$ .

Determine a equação reduzida da reta  $s$ .

11.2. Estude a função  $g$  quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

Na sua resposta, apresente:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de  $g$  tem concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de  $g$  tem concavidade voltada para cima;
- a(s) abscissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de  $g$ , caso este(s) exista(m).

Item obrigatório

12. Considere o ponto  $A$ , afixo no plano complexo do número  $z = -2i$ .

Qual dos seguintes números complexos tem como afixo o transformado do ponto  $A$  por uma rotação de centro na origem e de ângulo orientado de amplitude  $\frac{\pi}{3}$  radianos?

a)  $\sqrt{3} - i$

b)  $-\sqrt{3} + i$

c)  $1 - \sqrt{3}i$

d)  $-1 + \sqrt{3}i$

13. Considere, em  $\mathbb{C}$ , conjunto dos números complexos, o número  $w = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}}$ .

O número complexo  $w$  é uma das raízes sextas de um certo número complexo  $z$ .

Determine  $iz$ .



Item obrigatório

14. Considere uma função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , par e diferenciável.

Seja  $a$  um número real tal que  $f'(a) = f(a)$ , com  $f(a) \neq 0$ .

Prove que  $f'(-a) \times f'(a) = -[f(a)]^2$ .

Sugestão: na sua resposta, poderá fazer uso da definição de derivada de uma função num ponto.

FIM

## COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.

1.1. ....	12 pontos
1.2. ....	14 pontos
4. ....	12 pontos
6.1. ....	12 pontos
6.2. ....	14 pontos
7.1. ....	12 pontos
7.2. ....	14 pontos
9. ....	14 pontos
10. ....	14 pontos
11.1. ....	14 pontos
12. ....	12 pontos
14. ....	14 pontos

---

Subtotal ..... 158 pontos

Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

2. ....	14 pontos
3. ....	14 pontos
5. ....	14 pontos
8. ....	14 pontos
11.2. ....	14 pontos
13. ....	14 pontos

---

Subtotal ..... 42 pontos

---

TOTAL ..... 200 pontos