REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E INOVAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática B

Prova 735 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2024

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 62/2023, de 25 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 13 Páginas

---

A prova inclui 9 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 5 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, apenas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente, consoante a situação, todos os elementos relevantes visualizados, como:

- os gráficos obtidos, em referencial cartesiano, com os pontos relevantes para a resolução assinalados (por exemplo, pontos de intersecção de gráficos, pontos de máximos e pontos de mínimos);
- as linhas da tabela obtida que são relevantes para a resolução;
- as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r}{180}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: $\textit{Semiperímetro} \times \textit{Apótema}$

Sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r^2}{360}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$ (r – raio)

Área lateral de um cilindro reto: $2 \pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Cilindro: $\textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

- **Progressão aritmética:** $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$
- **Progressão geométrica:** $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Probabilidades e Estatística

Se X é uma variável aleatória discreta de valores x_i com probabilidade p_i, então:

- **Valor médio** de X:
  $\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$
- **Desvio padrão** de X:
  $\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é uma variável aleatória normal de valor médio μ e desvio padrão σ, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

*** 1.** Ao resolver, corretamente, um problema de programação linear, um aluno obteve o seguinte sistema de restrições:

$$\begin{cases} 3x + y \leq 36 \\ x + 3y \leq 36 \\ x + y \leq 16 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

O aluno estabeleceu a função objetivo, a ser maximizada:

$$L(x, y) = 40x + 50y$$

Qual dos seguintes pares ordenados corresponde à solução ótima deste problema?

(A) $(10, 6)$ **(B)** $(9, 9)$ **(C)** $(8, 8)$ **(D)** $(6, 10)$

2. A altura, h, em metros, relativamente ao solo, de um projétil lançado na vertical, de baixo para cima, em função do tempo, t, em segundos, desde o instante inicial em que é lançado até ao instante em que atinge o solo, pode ser dada por

$$h(t) = -4{,}9t^2 + 20t + 10$$

*** 2.1.** Complete o texto, de acordo com o modelo apresentado, selecionando a opção correta para cada espaço.

Escreva, na folha de respostas, apenas cada um dos números, **I**, **II** e **III**, seguido da opção, **a)**, **b)** ou **c)**, selecionada.

«O projétil é lançado de uma altura de ____**I**____, a uma velocidade instantânea inicial de ____**II**____, e atinge o solo ____**III**____, aproximadamente, depois de ser lançado.»

I	II	III
a) 4,9 m **b)** 10 m **c)** 20 m	**a)** 4,9 m/s **b)** 10 m/s **c)** 20 m/s	**a)** 2,0 s **b)** 4,5 s **c)** 10 s

*** 2.2.** Determine, de acordo com o modelo apresentado, quanto tempo demorou o projétil a atingir, pela primeira vez, 25 metros de altura relativamente ao solo.

Apresente o valor pedido em segundos, arredondado às unidades.

*** 3.** Em muitas serras portuguesas, existem parques eólicos, nos quais estão instalados aerogeradores para produção de energia elétrica. Cada aerogerador é constituído, entre outros elementos, por uma torre e por um rotor de três pás.

A Figura 1 é um esquema de um aerogerador do Parque Eólico de Bigorne. A torre deste aerogerador tem 67 metros de altura e as pás têm 33 metros de comprimento. O aerogerador está assente num patamar horizontal.

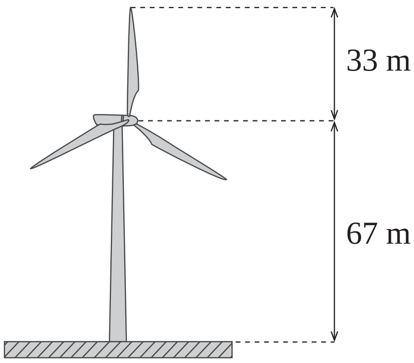

Figura 1

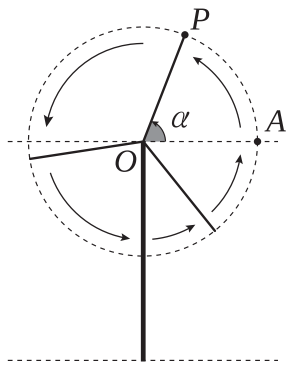

Figura 2

Na Figura 2, que não está à escala, está representado um modelo simplificado do movimento de rotação do aerogerador, em que:

- o ponto O é o centro da rotação, correspondente ao centro do rotor;
- o ponto P representa a extremidade de uma das pás;
- o ponto A representa a posição inicial dessa extremidade;
- α é a amplitude, em graus, do ângulo orientado AOP.

Qual das seguintes expressões define a função, d, que, para cada valor de α, dá a distância da extremidade dessa pá ao patamar em que a torre do aerogerador está assente?

(A) $d(\alpha) = 33 + 67\,\mathrm{sen}\,\alpha$

(B) $d(\alpha) = 67 + 33\,\mathrm{sen}\,\alpha$

(C) $d(\alpha) = 33 + 67\cos\alpha$

(D) $d(\alpha) = 67 + 33\cos\alpha$

*** 4.** No histograma da Figura 3, estão representados os dados relativos ao perímetro cefálico, em centímetros, de um grupo de recém-nascidos, recolhidos por uma equipa de obstetras de uma maternidade.

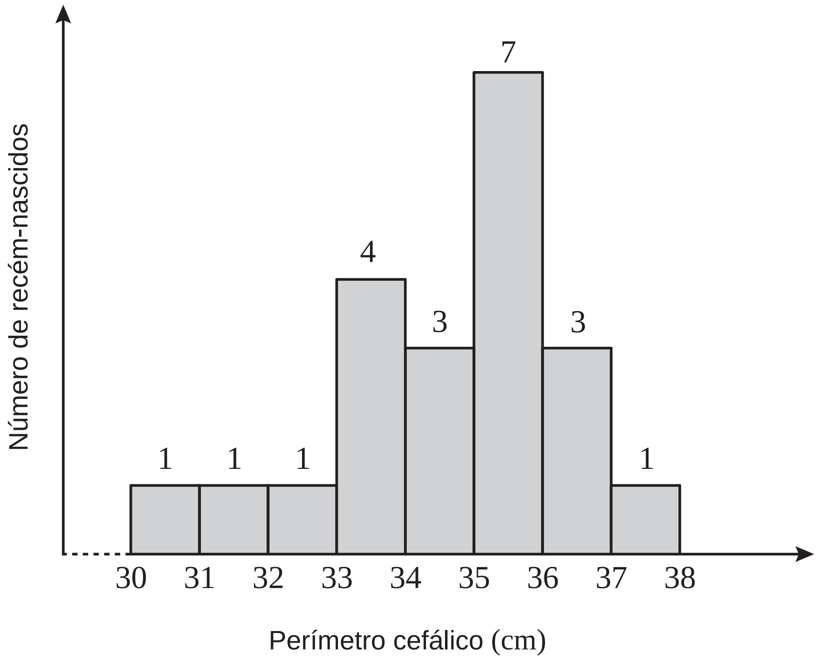

Figura 3

Qual é a classe a que pertence a mediana deste conjunto de dados?

Justifique a sua resposta.

✱ 5. Admita que o perímetro cefálico, em centímetros, num grupo de recém-nascidos em determinada maternidade, num dado ano civil, segue uma distribuição normal de valor médio $34{,}88\ \text{cm}$.

Considera-se, ao acaso, um recém-nascido deste grupo.

Complete o texto, de acordo com a distribuição normal, selecionando a opção correta para cada espaço.

Escreva, na folha de respostas, apenas cada um dos números, **I**, **II** e **III**, seguido da opção, **a)**, **b)** ou **c)**, selecionada.

«A probabilidade de o perímetro cefálico do recém-nascido ser maior do que $34{,}88\ \text{cm}$ é ___**I**___ a 50%.

A probabilidade de o perímetro cefálico do recém-nascido ser menor do que $35{,}88\ \text{cm}$ é ___**II**___ a 50%.

A probabilidade de o perímetro cefálico do recém-nascido ser inferior a $33{,}88\ \text{cm}$ é igual à probabilidade de o seu perímetro cefálico ser superior a ___**III**___ cm.»

I	II	III
a) inferior	**a)** inferior	**a)** $32{,}88$
b) igual	**b)** igual	**b)** $34{,}88$
c) superior	**c)** superior	**c)** $35{,}88$

6. Viajando por Portugal, podemos contemplar vários monumentos comemorativos do 25 de Abril de 1974. Nas figuras 4 e 5, apresentam-se dois exemplos de monumentos comemorativos localizados, respetivamente, em Fafe e em Marco de Canaveses.

Figura 4

Figura 5

Inspirado nestes monumentos, um outro município pretende construir um conjunto de 25 pórticos retangulares, colocados sequencialmente no jardim municipal, com as características seguintes:

- cada pórtico tem uma trave horizontal com $75\ \text{cm}$ de comprimento e dois postes iguais, colocados na vertical;
- a altura de cada pórtico corresponde ao comprimento de cada um dos seus postes colocados na vertical;
- o primeiro pórtico tem $75\ \text{cm}$ de altura;
- cada pórtico, a partir do primeiro, tem mais $15\ \text{cm}$ de altura do que o pórtico anterior.

Na Figura 6, que não está à escala, apresenta-se o esquema dos quatro primeiros pórticos.

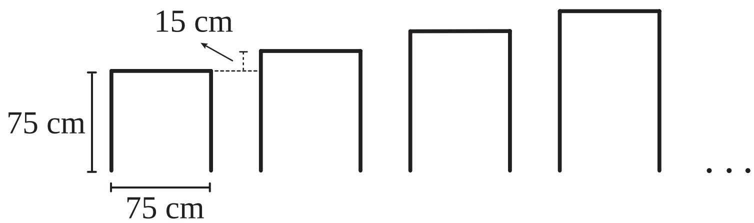

Figura 6

Na construção dos pórticos, será utilizado tubo de ferro oxidado.

Não tenha em consideração a espessura dos postes nem das traves.

* **6.1.** Considere a sequência crescente das alturas dos pórticos, em centímetros.

Justifique que os termos desta sequência são termos consecutivos de uma progressão aritmética.

Na sua resposta, apresente a razão dessa progressão.

6.2. Determine o comprimento total de tubo necessário para a construção dos 25 pórticos.

Apresente o resultado em metros.

7. Um artista plástico vai utilizar uma estrutura com três barras de ferro fundido para criar uma instalação artística comemorativa do 25 de Abril de 1974, como se ilustra na Figura 7.

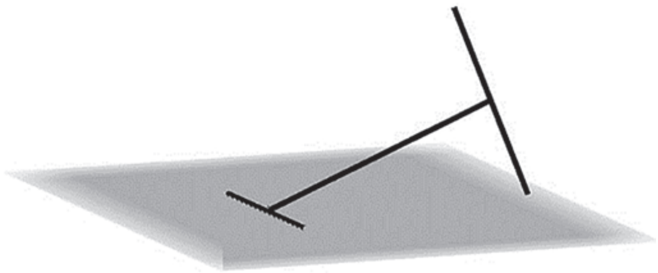

Figura 7

A Figura 8 é um esquema dessa estrutura, representado em referencial ortogonal e monométrico, $Oxyz$.

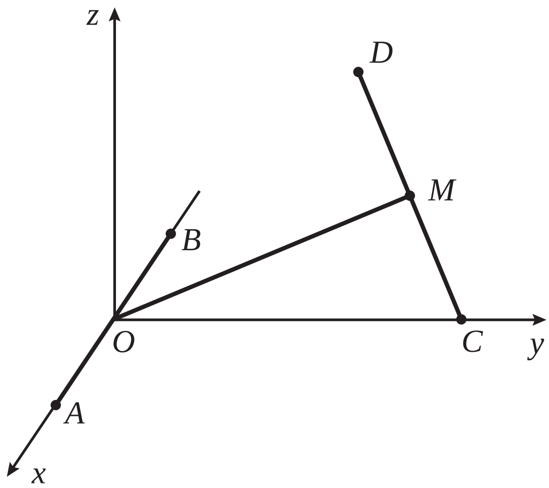

Figura 8

No referencial, a unidade é o metro.

Sabe-se que:

- o plano xOy representa o solo;
- $[AB]$, $[CD]$ e $[OM]$ representam as barras de ferro que formam a estrutura;
- os pontos A e B pertencem ao eixo Ox ;
- o ponto C pertence ao semieixo positivo Oy ;
- o ponto D pertence ao plano yOz ;
- os pontos O e M são, respetivamente, os pontos médios de $[AB]$ e $[CD]$;
- $[OM] \perp [CD]$;
- $\overline{AB} = \overline{CD} = 5 \text{ m}$ e $\overline{OM} = 6 \text{ m}$.

A altura da estrutura é a distância do ponto representado por D ao solo.

7.1. Determine a altura da estrutura.

Apresente o resultado em metros, arredondado às centésimas.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

7.2. A estrutura será instalada numa caixa cúbica transparente, com 343 m^3 de volume.

Na Figura 9, que não está à escala, encontra-se representada a caixa cúbica, em referencial ortogonal e monométrico, $Oxyz$, em que:

- P, Q e R são vértices do cubo;
- a aresta $[PR]$ está contida no eixo Ox;
- a origem do referencial é o ponto médio da aresta $[PR]$;
- uma das faces do cubo está contida no plano xOy.

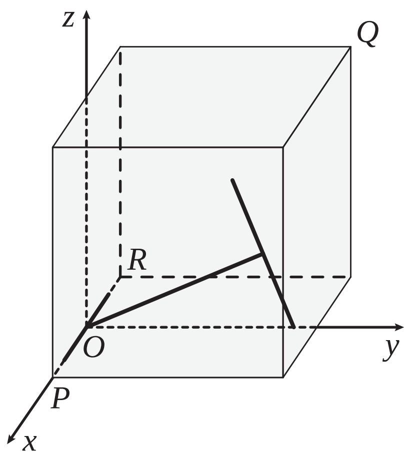

Figura 9

No referencial, a unidade é o metro.

Determine as coordenadas do vértice Q.

8. Uma rádio local fez uma emissão especial comemorativa do 25 de Abril de 1974, durante o dia 25 de abril de 2024. A emissão começou às 0 horas desse dia e durou 24 horas.

8.1. Admita que o número, N, em milhares, de ouvintes da rádio ao longo da emissão especial é dado, aproximadamente, por

$$N(t) = 8{,}04 - (0{,}1t - 1{,}4)^2 \times e^{0{,}8 - 0{,}05t} \quad , \text{ com } 0 \leq t \leq 24$$

em que t é o tempo, em horas, decorrido desde o início da emissão especial.

8.1.1. Entre as 8h e as $10\text{h}\ 15\text{min}$, a rádio transmitiu em direto as comemorações que decorreram numa praça dessa localidade. Neste período de tempo, o número de ouvintes esteve sempre a aumentar.

Determine quanto variou o número de ouvintes durante a transmissão em direto.

Apresente o valor pedido em unidades.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

8.1.2. Durante esta emissão especial, foi transmitido um concerto em que participaram vários artistas.

Durante a emissão do concerto, o número de ouvintes foi sempre superior a 8000.

A emissão do concerto pode ter durado 4 horas?

Justifique a sua resposta.

8.2. Durante a emissão, a temperatura ambiente no estúdio de rádio foi variando, por influência da climatização, do número de pessoas presentes, dos aparelhos eletrónicos em funcionamento, entre outros fatores. Admita que, no estúdio:

- entre as 0 horas e as 10 horas, a temperatura ambiente esteve sempre a aumentar;
- durante toda a emissão, o valor máximo da temperatura ambiente ocorreu às 20 horas.

Seja f a função que faz corresponder o tempo, t, em horas, decorrido desde o início da emissão, ao valor da temperatura ambiente, em graus Celsius, no estúdio, no dia 25 de abril de 2024.

Seja V a função que dá a taxa de variação instantânea da função f para cada valor de t.

Na Figura 10, estão representados dois gráficos, A e B, em referencial cartesiano ortogonal, e assinalados os respetivos zeros, 10 e 20.

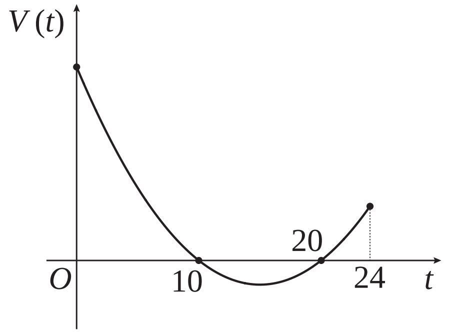

Gráfico A

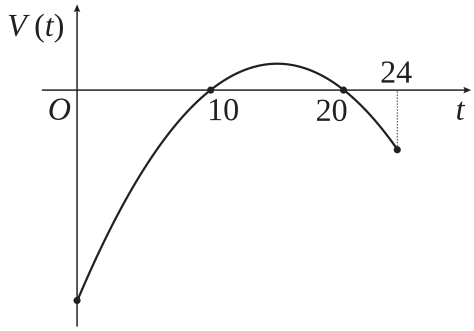

Gráfico B

Figura 10

Justifique que nem o gráfico A nem o gráfico B podem representar a função V.

Apresente uma razão para cada um dos gráficos.

9. Para o funcionamento de uma máquina, uma fábrica utiliza água que se encontra num depósito.

Ao longo do dia, a altura da água no depósito vai variando.

Admita que a altura, a, em metros, de água no depósito, às t horas de um certo dia, é dada por

$$a(t) = 5 + 2{,}8 \cos\left(\frac{\pi}{12}t - 2\right), \text{ com } t \in [0, 24]$$

O argumento da função cosseno está em radianos.

Quanto tempo decorreu, em horas, desde o instante em que a altura de água no depósito foi máxima até ao instante em que a altura de água no depósito foi mínima?

Em cálculos intermédios, utilize valores aproximados às centésimas.

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 9 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.**	**2.1.**	**2.2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.1.**	**7.1.**	**8.2.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	14	14	18	14	18	14	18	18	18	**146**
Destes 5 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**6.2.**	**7.2.**	**8.1.1.**	**8.1.2.**	**9.**					**Subtotal**
Cotação (em pontos)	3 × 18 pontos									**54**
TOTAL										**200**

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

Prova 735

2.ª Fase