REPÚBLICA PORTUGUESA

EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E INOVAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

Prova 835 | Época Especial | Ensino Secundário | 2024

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 62/2023, de 25 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 14 Páginas

A prova inclui 9 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 5 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente, consoante a situação, todos os elementos relevantes visualizados.

Formulário

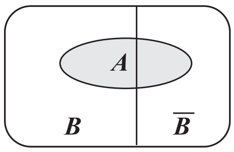
Modelos de grafos

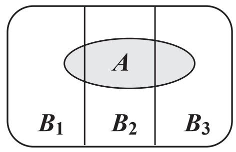
Condição necessária e suficiente para que um grafo conexo admita circuitos de Euler

Um grafo conexo admite circuitos de Euler se e só se todos os seus vértices forem de grau par.

Modelos de probabilidade

Teorema da probabilidade total e regra de Bayes





$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) =$$
$$= P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B) \times P(A \mid B)}{P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})}$$

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) =$$
$$= P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)$$

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B_k) \times P(A \mid B_k)}{P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)}$$

podendo k tomar os valores 1, 2 ou 3

Modelo normal

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$$
$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$$
$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$$

Intervalos de confiança

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável aleatória normal X, admitindo que se conhece o desvio padrão da variável

$$\left]\overline{x} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\overline{x}$ – média amostral

σ – desvio padrão da variável

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável aleatória X, admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left]\overline{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\overline{x}$ – média amostral

s – desvio padrão amostral

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para uma proporção p, admitindo que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left]\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \ \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\hat{p}$ – proporção amostral

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

(*) Valores de z para os níveis de confiança mais usuais

Nível de confiança	90%	95%	99%
z	1,645	1,960	2,576

*** 1.** A família Antunes decidiu comemorar a próxima passagem de ano na ilha da Madeira. Para planear a sua estada, os elementos da família começaram por escolher o primeiro local a visitar de entre alguns que consideram emblemáticos: Cabo Girão, Pico do Areeiro, Porto Moniz e Santana.

Para fazer a sua escolha, a família decidiu distribuir pelos locais um total de 40 pontos. Cada elemento da família começou por atribuir pontos a cada local, num total de 10 pontos, não podendo atribuir igual número de pontos a locais distintos.

A Tabela 1 apresenta a distribuição dos 10 pontos, realizada por cada elemento da família, de acordo com as suas preferências.

Tabela 1

	Cabo Girão	**Pico do Areeiro**	**Porto Moniz**	**Santana**
António	2	1	3	4
Camila	4	5	1	0
Dora	1	4	3	2
Francisco	3	1	4	2

O primeiro local a visitar resultou da aplicação do método seguinte.

- Efetua-se a soma dos pontos atribuídos a cada local pelos elementos da família e verifica-se se algum dos locais obtém a maioria absoluta do total de pontos. Caso isso se verifique, esse local será o primeiro a visitar.
- Se nenhum dos locais obtiver mais pontos do que os outros todos juntos, o local menos pontuado é eliminado da tabela. Caso exista empate entre os locais menos pontuados, o local a eliminar é determinado por sorteio. Uma nova tabela de pontuações é, em seguida, criada com menos uma coluna do que a anterior e os pontos atribuídos por cada elemento da família ao local eliminado revertem para o local, de entre os restantes, ao qual cada um deles atribui maior pontuação.
- Os procedimentos anteriores são aplicados à nova tabela de pontuações obtida no ponto anterior, com os pontos já acumulados.
- O processo repete-se até que um dos locais obtenha maioria absoluta do total de pontos atribuídos.

Determine qual será o primeiro local a visitar pela família Antunes.

2. Após ter decidido que iria passar o final do ano na ilha da Madeira com a família, o António pesquisou, *online*, os diferentes preços praticados por dois hotéis da sua preferência.

Na Tabela 2, indicam-se os preços, por noite, em quarto duplo, nos hotéis que selecionou, bem como a política de cancelamento praticada em cada um deles.

Tabela 2

	Hotel Azálea	**Hotel Camélia**
Preço, por noite, de um quarto duplo	• 150,20 € nas duas primeiras noites • 142,30 € a partir da terceira noite	134,55 €
Política de cancelamento	Cancelamento sem custos até dois dias antes da data da reserva	Sem possibilidade de cancelamento

Para prevenir alguma eventualidade que inviabilizasse a ida à ilha da Madeira, o António optou por efetuar a reserva para a sua família no Hotel Azálea, para assim ter a possibilidade de, se necessário, fazer o cancelamento do alojamento sem custos. Para o efeito, reservou dois quartos duplos para cada uma das 4 noites de estada na ilha da Madeira.

No ato do pagamento, o António usufruiu de um desconto, acabando por pagar o mesmo que pagaria se tivesse feito a reserva de dois quartos duplos, por 4 noites, no Hotel Camélia.

Determine qual o desconto, em percentagem, de que o António usufruiu.

Na sua resposta, apresente:

– o valor total da reserva feita pelo António no Hotel Azálea, antes de ter sido aplicado o desconto;

– o valor total que o António pagaria se tivesse feito a reserva no Hotel Camélia.

3. As levadas são canais de água cuja função original era o transporte de água do norte da ilha da Madeira, onde o clima é mais húmido, para o sul da ilha, onde o clima é mais seco. Atualmente, os percursos pedestres ao longo das levadas são uma das atrações turísticas da Madeira.

* **3.1.** Uma empresa pretende oferecer aos seus clientes a exploração de percursos pedestres ao longo de 12 levadas diferentes. Cada um dos três guias, o Fernando, a Helena e a Joana, funcionários da empresa, ficará responsável pelo acompanhamento dos clientes na exploração de determinados percursos pedestres.

Para definir as levadas a atribuir a cada guia, foi utilizado o método a seguir descrito.

- Atribui-se um código a cada uma das levadas, $L1$, $L2$, $L3$, ... , $L12$, e anota-se o código de cada levada num cartão. De seguida, dispõem-se os doze cartões em linha, por ordem crescente de numeração.
- Cada guia dispõe de dois marcadores para dividir em três partes, de forma secreta e que considera justa, a linha de cartões. Os marcadores do Fernando designam-se $F1$ e $F2$, os da Helena designam-se $H1$ e $H2$, e os da Joana designam-se $J1$ e $J2$.
- Depois de se revelarem quais os marcadores de cada guia, percorre-se a linha de cartões, partindo do cartão mais à esquerda, até se encontrar o primeiro marcador. Ao guia que colocou esse marcador serão atribuídas as levadas cujos códigos estão registados nos cartões à esquerda do mesmo. Esse guia já tem a sua parte.
- De seguida, percorre-se a linha de cartões, sempre da esquerda para a direita, até se encontrar o segundo marcador de um dos outros dois guias. Ao guia que colocou esse marcador serão atribuídas as levadas cujos códigos estão registados nos cartões compreendidos entre os seus primeiro e segundo marcadores.
- Ao guia que resta, serão atribuídas as levadas cujos códigos estão registados nos cartões situados à direita do seu segundo marcador.
- Se sobrarem cartões, as levadas cujos códigos estão registados nesses cartões serão atribuídas por sorteio.

Na Figura 1, está representada a linha de cartões, já ordenada, a distribuir pelos três guias, com os respetivos marcadores colocados.

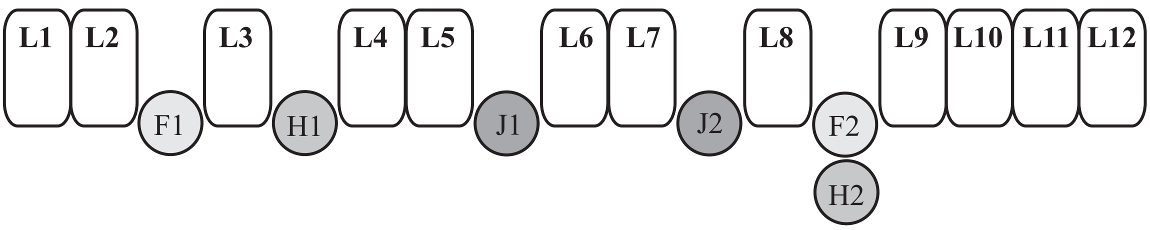


Figura 1

Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço.

Escreva na folha de respostas cada um dos números, **I**, **II**, **III** e **IV**, seguido da opção, **a)**, **b)** ou **c)**, selecionada. A cada espaço corresponde uma só opção.

Antes do sorteio de atribuição das levadas que restaram, à Joana serão atribuídas as levadas __**I**__ , à Helena serão atribuídas __**II**__ levadas e, ao Fernando, __**III**__ levadas. As levadas __**IV**__ serão duas das atribuídas por sorteio aos três guias.

I	II	III	IV
a) L1, L2, L3, L4 e L5	**a)** três	**a)** duas	**a)** L3 e L8
b) L6 e L7	**b)** quatro	**b)** quatro	**b)** L3 e L6
c) L8, L9, L10, L11 e L12	**c)** cinco	**c)** oito	**c)** L8 e L9

* **3.2.** Um morador de uma das freguesias da ilha da Madeira construiu um grafo que modela a existência de troços pedonais que permitem transitar entre as levadas L1, L3, L5, L7 e L9. Nesse grafo, conexo, os vértices representam as levadas e as arestas representam os troços pedonais que permitem transitar entre levadas. Com base nesse grafo, o morador chegou à conclusão de que bastaria construir um novo troço pedonal entre as levadas L3 e L7, que ainda não existia, para ser possível iniciar e terminar um percurso numa mesma levada, percorrendo todos os troços pedonais, incluindo o novo, sem repetir nenhum deles.

Qual das tabelas pode apresentar o grau de cada vértice do grafo que o morador construiu?

(A)

Vértice	Grau
L1	4
L3	4
L5	3
L7	3
L9	4

(B)

Vértice	Grau
L1	3
L3	3
L5	3
L7	3
L9	2

(C)

Vértice	Grau
L1	2
L3	2
L5	4
L7	4
L9	2

(D)

Vértice	Grau
L1	4
L3	3
L5	2
L7	1
L9	2

4. Na ilha da Madeira, existem diversos miradouros com vistas deslumbrantes.

A Dora consultou um blogue sobre viagens, no qual estavam indicadas as altitudes de diversos miradouros, assim como informação sobre ligações diretas entre eles, quer fossem rodoviárias quer fossem pedonais.

Na Tabela 3, estão registadas as altitudes, em metros, dos miradouros referidos no blogue.

Tabela 3

Miradouro	**Altitude (em metros)**
Balcões (B)	860
Cabo Girão (CG)	580
Encumeada (E)	1007
Pináculo (P)	283
Pico do Areeiro (PA)	1818
Pico de Barcelos (PB)	355
Pico do Facho (PF)	280
Ponta do Pargo (PP)	312
Pico Ruivo (PR)	1862
Pico da Torre (PT)	205

Na Tabela 4, estão assinaladas com o símbolo ✓ as ligações diretas entre os miradouros, indicadas no blogue. O símbolo ✗ significa que, no blogue, não estava indicada a existência de uma ligação direta entre os miradouros.

Tabela 4

	B	**CG**	**E**	**P**	**PA**	**PB**	**PF**	**PP**	**PR**	**PT**
B		✗	✗	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✗
CG	✗		✓	✓	✗	✓	✗	✗	✗	✓
E	✗	✓		✓	✓	✓	✗	✗	✓	✓
P	✓	✓	✓		✓	✓	✓	✗	✗	✓
PA	✓	✗	✓	✓		✗	✓	✗	✓	✗
PB	✓	✓	✓	✓	✗		✓	✗	✗	✓
PF	✓	✗	✗	✓	✓	✓		✗	✓	✗
PP	✓	✗	✗	✗	✗	✗	✗		✗	✗
PR	✓	✗	✓	✗	✓	✗	✓	✗		✗
PT	✗	✓	✓	✓	✗	✓	✗	✗	✗	

A Dora pretende visitar miradouros de altitude superior a 350 metros e que tenham ligações diretas entre si.

Para definir o seu percurso, construiu um grafo, tendo por base a informação apresentada nas Tabelas 3 e 4.

Depois de construir o grafo, a Dora definiu o percurso, começando pelo miradouro de maior altitude. Em seguida, usando as ligações diretas, optou sempre pelo miradouro que, de entre os restantes, tem maior altitude.

Quantos miradouros poderá a Dora visitar, nestas condições?

Na sua resposta, apresente:

– um grafo semelhante ao que a Dora construiu;

– o percurso definido pela Dora.

5. Um navio de cruzeiro, que atracou no Funchal para a passagem de ano, tinha a bordo 1200 turistas de diferentes nacionalidades, tendo cada um deles apenas uma nacionalidade.

Na Tabela 5, está registado o número de turistas de nacionalidade X, de nacionalidade Y e de nacionalidade Z. Os turistas de outras nacionalidades foram contabilizados na categoria «Outra».

Tabela 5

Nacionalidade	Número de turistas
X	180
Y	350
Z	210
Outra	460

* **5.1.** Com base nos dados apresentados na Tabela 5, foi construído um gráfico circular com quatro sectores, correspondendo a cada sector o número de turistas associados a cada categoria.

Qual é a amplitude do ângulo ao centro, em graus, correspondente ao sector circular relativo ao número de turistas de nacionalidade Z?

(A) $17,5^{\circ}$

(B) 21°

(C) $33,5^{\circ}$

(D) 63°

* **5.2.** Admita que a média das idades:

- dos 1200 turistas que estavam a bordo do navio de cruzeiros é 54,5 anos;
- dos turistas de nacionalidade Y é 62 anos;
- dos turistas de «outra» nacionalidade é 56 anos;
- dos turistas de nacionalidade X é igual à média das idades dos turistas de nacionalidade Z.

Determine a média das idades dos turistas a bordo do navio de cruzeiro que têm nacionalidade X.

5.3. Na Figura 2, apresentam-se organizados os dados referentes às alturas, em metros, dos turistas de nacionalidade X, dos turistas de nacionalidade Y e dos turistas de nacionalidade Z, respetivamente, num histograma de frequências relativas, num histograma de frequências absolutas e num histograma de frequências absolutas acumuladas.

Nos histogramas, as alturas estão organizadas nas classes $[1,0;\, 1,2[$, $[1,2;\, 1,4[$, … , $[1,8;\, 2,0[$.

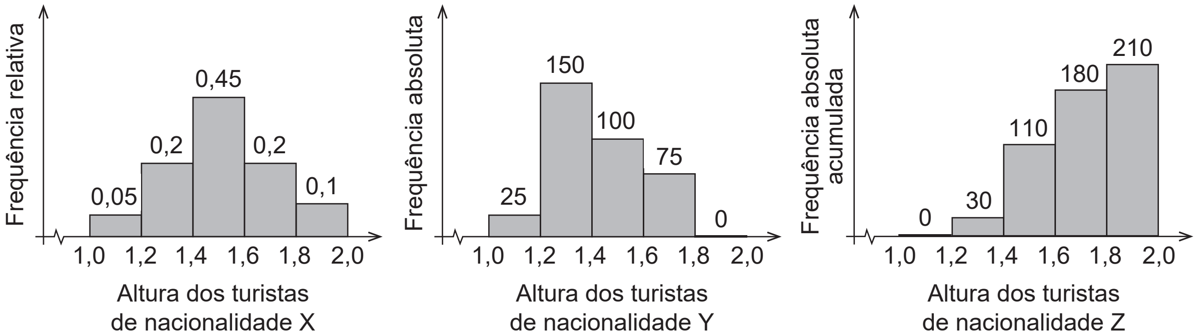


Figura 2

Associe a cada uma das nacionalidades, apresentadas na Coluna **I**, as afirmações da Coluna **II** que lhe correspondem, considerando os dados apresentados na Tabela 5 e na Figura 2.

Cada um dos números, de 1 a 7, deve ser associado apenas a uma letra, e todos os números devem ser utilizados.

Escreva na folha de respostas cada uma das letras da Coluna **I**, seguida do(s) número(s) correspondente(s) da Coluna **II**.

COLUNA I	COLUNA II
(a) X **(b)** Y **(c)** Z	**(1)** O turista mais baixo não pode ter esta nacionalidade. **(2)** Exatamente 70% dos turistas que medem menos de 1,6 metros têm esta nacionalidade. **(3)** O maior número de turistas que medem pelo menos 1,6 metros tem esta nacionalidade. **(4)** Os turistas cujas alturas mais frequentes se situam na classe $[1,2;\, 1,4[$ têm esta nacionalidade. **(5)** Exatamente metade dos turistas desta nacionalidade mede pelo menos 1,4 metros. **(6)** De entre os turistas que medem pelo menos 1,6 metros e menos de 1,8 metros, os desta nacionalidade são os menos numerosos. **(7)** Apenas 80 turistas cuja altura pertence à classe $[1,4;\, 1,6[$ têm esta nacionalidade.

6. O número de habitantes, A, em centenas, da freguesia A é dado aproximadamente por

$$A(t) = 1 + 30e^{-0,02t} \quad , \qquad t \in [0, 11]$$

em que t é o tempo medido em décadas e em que $t = 0$ corresponde ao final de 1900.

* **6.1.** Determine o valor da percentagem de diminuição do número de habitantes entre o final de 1970 e o final de 2000.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve três casas decimais.

6.2. No final de que ano é que o número de habitantes da freguesia A foi, pela primeira vez, inferior a 2700?

Para responder a esta questão, recorra às capacidades gráficas da sua calculadora e apresente:

– o(s) gráfico(s) visualizado(s);

– a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) relevante(s), com arredondamento às centésimas.

* **6.3.** O número de habitantes, B, em centenas, da freguesia B, t décadas após o final de 1900, é dado aproximadamente por

$$B(t) = 0,6t + 20,4 \quad , \qquad t \in [0, 11]$$

Complete o texto seguinte, selecionando a opção adequada a cada espaço.

Escreva na folha de respostas cada um dos números, **I**, **II**, **III** e **IV**, seguido da opção, **a)**, **b)** ou **c)**, selecionada. A cada espaço corresponde uma só opção.

No final do ano de 1900, o número de habitantes da freguesia A era ___**I**___ , sendo ___**II**___ ao número de habitantes da freguesia B. Decorridas ___**III**___ décadas, a freguesia que até então tinha menor número de habitantes passou a ser a freguesia com maior número de habitantes.

Decorridas duas décadas após o final do ano de 1900, é possível afirmar que, na freguesia B, o número de habitantes era ___**IV**___ a 2000.

I	II	III	IV
a) 3100	**a)** inferior	**a)** dez	**a)** inferior
b) 3950	**b)** igual	**b)** nove	**b)** igual
c) 4800	**c)** superior	**c)** oito	**c)** superior

7. Uma das atividades preferidas dos turistas na ilha da Madeira consiste em realizar uma descida num carro de vime, desde o Monte até ao Funchal. Cada carro de vime é conduzido por um carreiro, podendo ir sentados lado a lado dois turistas.

Os quatro elementos da família Antunes, os pais e os dois filhos, decidiram fazer a descida do Monte até ao Funchal em dois desses carros de vime.

7.1. Para decidir qual deles irá no carro de vime com a mãe, os dois irmãos jogam um jogo.

Cada um deles lança um dado cúbico equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6, e ganha aquele que obtiver o maior número na face do dado que ficar voltada para cima. Se houver empate, repetem o lançamento dos dados até que um deles ganhe.

Determine a probabilidade de o Francisco, um dos irmãos, ganhar o jogo à primeira tentativa.

Apresente a resposta na forma de fração irredutível.

* **7.2.** No momento em que a família Antunes decidiu fazer a descida nos carros de vime, os carreiros disponíveis eram o Alves, o Bino e o Célio.

Sabe-se que o Alves realiza 40% das descidas, o Bino realiza 30% das descidas e o Célio realiza 30% das descidas.

Por vezes, os condutores oferecem uma flor aos turistas que fazem a descida no seu carro de vime. O Alves oferece a flor em 20% dos casos, o Bino, em 55% dos casos, e o Célio, em 40% dos casos.

No final da descida, a senhora Antunes recebeu uma flor.

Determine a probabilidade de a senhora Antunes ter realizado a descida num carro de vime conduzido pelo Bino.

Apresente o resultado na forma de dízima, com arredondamento às centésimas.

8. Na noite de passagem de ano, antes do lançamento do fogo de artifício, foram questionados 105 turistas com o intuito de se saber durante quantos dias ficariam na ilha da Madeira.

Na Tabela 6, estão parcialmente registadas as respostas dadas pelos turistas questionados.

Tabela 6

N.º de dias	2	3	4	5
N.º de turistas	18		29	

O intervalo $]0{,}306;\ 0{,}494[$ é o intervalo de confiança a 95% para a proporção de turistas que, tendo passado a noite de passagem de ano na ilha da Madeira, ficariam no máximo três dias na ilha.

Determine o número de turistas que, tendo passado a noite de passagem de ano na ilha da Madeira, responderam que ficariam exatamente três dias na ilha.

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 9 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.**	**3.1.**	**3.2.**	**5.1.**	**5.2.**	**5.3.**	**6.1.**	**6.3.**	**7.2.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	17	15	15	15	17	15	17	15	17	**143**

Destes 5 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**2.**	**4.**	**6.2.**	**7.1.**	**8.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	3 x 19 pontos					**57**
TOTAL						**200**