REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E INOVAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | Época Especial | Ensino Secundário | 2024

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 62/2023, de 25 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 8 Páginas

---

A prova inclui 12 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 6 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

Complexos

$(\rho\, e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho\, e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\; e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ $\quad (k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\, e^u$

$(a^u)' = u'\, a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

✱ **1.** Seja (u_n) a sucessão definida por

$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n + 2, \ \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Qual é o terceiro termo da sucessão (u_n) ?

(A) 8 **(B)** 10 **(C)** 18 **(D)** 38

2. Usando cartões numerados, construiu-se uma figura, com forma triangular, constituída pelas n primeiras linhas do triângulo de Pascal.

Na Figura 1, estão representadas as cinco primeiras linhas dessa construção.

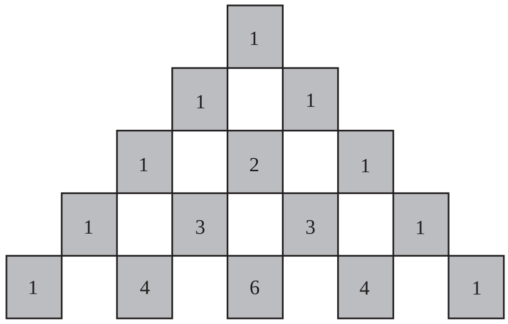

Figura 1

✱ **2.1.** Uma das linhas dessa construção contém, exatamente, 19 cartões.

Qual é o número inscrito no quarto cartão dessa linha?

(A) 816 **(B)** 969 **(C)** 3060 **(D)** 3876

2.2. Calcule o valor de n, sabendo que, na construção da figura, foram utilizados, exatamente, 3081 cartões.

3. Seja f a função, de domínio $]-2\pi, 2\pi]$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - e^{6x}}{3x} & \text{se } -2\pi < x < 0 \\[2ex] \dfrac{4\cos x}{\operatorname{sen} x - 2} & \text{se } 0 \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

Resolva os itens **3.1.** e **3.2.** sem recorrer à calculadora.

✱ **3.1.** Averigue se a função f é contínua em $x = 0$.

✱ **3.2.** Estude, no intervalo $]0, 2\pi]$, a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos.

Na sua resposta, apresente os intervalos de monotonia e os valores de x para os quais a função f tem extremos relativos.

4. Um saco contém apenas bolas amarelas e bolas verdes, todas indistinguíveis ao tato.

*** 4.1.** Retiram-se, ao acaso, sucessivamente e sem reposição, duas bolas do saco.

Sejam A e B os acontecimentos:

A: «A primeira bola retirada é amarela»;

B: «A segunda bola retirada é amarela».

Sabe-se que $P(A \cap B) = \frac{2}{3}P(A)$.

Justifique que, inicialmente, existia um número ímpar de bolas amarelas no saco.

4.2. Considere que se alterou a constituição inicial do saco e que, neste, estão agora duzentas bolas indistinguíveis ao tato.

Sabe-se que 49% das bolas são verdes.

Extraem-se, ao acaso, quatro bolas do saco.

Determine a probabilidade de o conjunto formado por essas quatro bolas conter, pelo menos, três bolas verdes.

Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às décimas.

5. Na Figura 2, está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um cone reto de vértice V .

Sabe-se que:

- a base do cone intersecta o semieixo positivo Ox no ponto A e o semieixo positivo Oy no ponto B ;
- o segmento de reta $[AB]$ é um diâmetro da base do cone;
- a base do cone está contida no plano definido pela equação $x + 2y - 8 = 0$;
- a abcissa do ponto V tem menos uma unidade do que a sua ordenada.

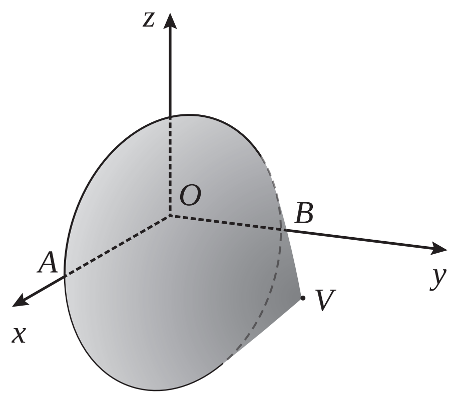

Figura 2

*** 5.1.** Qual das seguintes equações define um plano paralelo ao plano que contém a base do cone e que passa no ponto de coordenadas $(1, -3, 5)$?

(A) $-2x + y + 5 = 0$ **(B)** $x + 2y - 10 = 0$ **(C)** $x + 2y + 5 = 0$ **(D)** $x - 3y + 5 = 0$

*** 5.2.** Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Determine as coordenadas do ponto V .

* **6.** Uma empresa tem 50 funcionários, dos quais 12 são da área comercial e os restantes são da área de produção.

A distribuição dos vencimentos, em euros, dos funcionários da área de produção tem média 1010, desvio padrão $62{,}71$ e mediana 900.

Na tabela seguinte, estão representados os vencimentos, em euros, dos 12 funcionários da área comercial.

Vencimento (em euros)	**Número de funcionários (área comercial)**
910	2
920	2
940	3
960	2
980	2
1100	1

Nenhum dos funcionários da empresa tem vencimento igual a 900 euros.

Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço, de acordo com os dados apresentados.

Escreva, na folha de respostas, apenas cada um dos números, **I**, **II**, **III** e **IV**, seguido da opção, **a)**, **b)** ou **c)**, selecionada. A cada espaço corresponde uma só opção.

A mediana dos vencimentos dos funcionários da área comercial é ____**I**____ euros, e o vencimento médio dos funcionários desta área é ____**II**____ ao vencimento médio dos funcionários da área de produção.

A dispersão relativamente à média da distribuição dos vencimentos dos funcionários da área de produção é ____**III**____ à dispersão relativamente à média da distribuição dos vencimentos dos funcionários da área comercial.

A percentagem de funcionários da empresa com vencimento menor do que 900 euros é ____**IV**____ .

I	**II**	**III**	**IV**
a) 930 **b)** 940 **c)** 950	**a)** inferior **b)** igual **c)** superior	**a)** inferior **b)** igual **c)** superior	**a)** 36% **b)** 38% **c)** 50%

7. Na Figura 3, estão representados, em referencial o.n. Oxy, o quadrilátero $[ABCD]$ e a circunferência de centro em O e raio 4.

Sabe-se que:

- o segmento de reta $[AC]$ é um diâmetro da circunferência;
- α é a inclinação, em radianos, da reta AC $\left(\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[\right)$;
- o ponto B pertence ao semieixo negativo Ox, e o ponto D pertence ao semieixo positivo Ox;
- as retas AB e CD são paralelas ao eixo Oy.

Mostre que a área do quadrilátero $[ABCD]$ é dada pela expressão $-16 \operatorname{sen}(2\alpha)$.

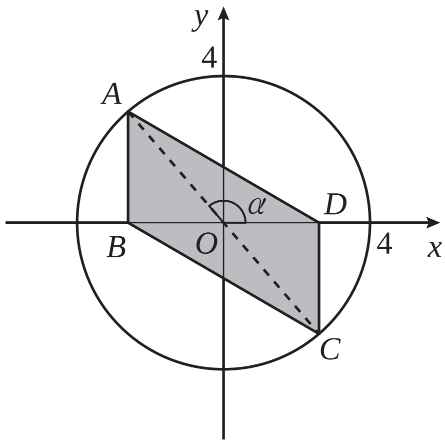

Figura 3

8. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Seja a um número real maior do que 1, e seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax^3 + x - 2$.

Mostre que a função f tem, pelo menos, um zero no intervalo $]0, 1[$.

9. Resolva, em $\mathbb{R}$, sem recorrer à calculadora, a equação

$$\frac{1}{2}\log_2 x - \log_2 \sqrt{x+1} = -1$$

*** 10.** Admita que, nos primeiros quinze minutos de uma reação química entre duas substâncias, a massa, m, de uma das substâncias, medida em gramas, é dada, t minutos após o início da reação, por

$$m(t) = \frac{1764}{1 - 0{,}16e^{-0{,}42t}}, \text{ com } 0 \leq t \leq 15$$

No primeiro minuto da reação, existe um instante a para o qual se verifica que, no intervalo de tempo $[a, 3a]$, a massa dessa substância diminui 5%.

Determine, recorrendo à calculadora, a amplitude desse intervalo.

Apresente o resultado em minutos e segundos, com arredondamento ao segundo.

Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

– apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;

– represente, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora e assinale o(s) ponto(s) relevante(s), que lhe permitem resolver a equação.

11. Na Figura 4, estão representadas, em referencial o.n. Oxy, parte do gráfico da função f, diferenciável, de domínio $\mathbb{R}$, a reta r, tangente ao gráfico de f na origem do referencial, e a reta s, assíntota ao gráfico de f quando x tende para $+\infty$.

Sabe-se que:

- I é o ponto de intersecção das retas r e s e pertence ao 4.º quadrante;
- $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} \times \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\frac{8}{9}$.

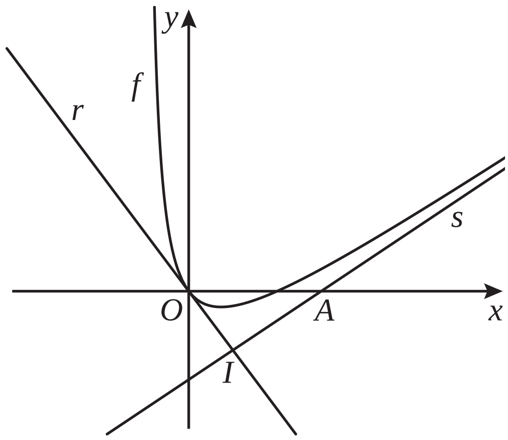

Figura 4

Considere as proposições seguintes.

I. $f'(0) > 0$.

II. As retas r e s são perpendiculares.

Justifique que as proposições **I** e **II** são falsas.

Na sua resposta, apresente, para cada uma das proposições, uma razão que justifique a sua falsidade.

12. Na Figura 5, está representado, no plano complexo, o losango $[ABCD]$, com $\overline{AB} = 5$.

Os pontos A, B, C e D são os afixos dos números complexos z_1, z_2, z_3 e z_4, respetivamente.

Sabe-se que:

- z_1 e z_3 são números reais e $|z_1 - z_3| = 6$;
- z_2 e z_4 são imaginários puros.

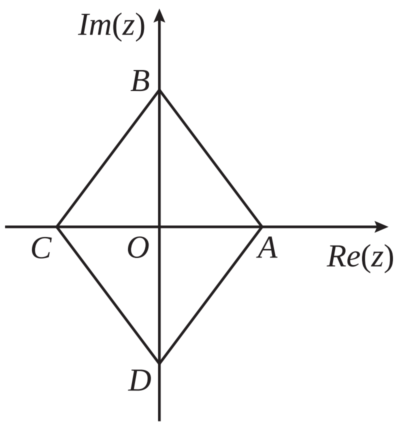

Figura 5

Qual dos seguintes números complexos é igual a $z_2 \times z_4$?

(A) 25 **(B)** 16

(C) -16 **(D)** -25

13. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, um número $z = 2e^{i\theta}$, com $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Determine o valor de θ tal que $z^2 + 2z\overline{z} - 6 = 2\sqrt{3}\,i$.

✱ **14.** Seja f uma função contínua, de domínio $[0, +\infty[$, cujo gráfico admite uma assíntota horizontal.

Determine uma equação da assíntota não vertical ao gráfico da função g , de domínio $[0, +\infty[$, definida por

$$g(x) = \sqrt{(f(x))^2 + 4x^2 + 5x}$$

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.**	**2.1.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.1.**	**5.1.**	**5.2.**	**6.**	**10.**	**11.**	**12.**	**14.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	12	12	14	14	14	12	14	12	14	14	12	14	**158**
Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**2.2.**		**4.2.**		**7.**		**8.**		**9.**		**13.**		**Subtotal**
Cotação (em pontos)	3 × 14 pontos												**42**
TOTAL													**200**