REPÚBLICA PORTUGUESA

EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E INOVAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática B

Prova 735 | Época Especial | Ensino Secundário | 2024

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 62/2023, de 25 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 13 Páginas

A prova inclui 9 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 5 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, apenas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente, consoante a situação, todos os elementos relevantes visualizados, como:

- os gráficos obtidos, em referencial cartesiano, com os pontos relevantes para a resolução assinalados (por exemplo, pontos de intersecção de gráficos, pontos de máximos e pontos de mínimos);
- as linhas da tabela obtida que são relevantes para a resolução;
- as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r}{180}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Polígono regular: $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r^2}{360}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Área lateral de um cilindro reto: $2\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Cilindro: $\text{Área da base} \times \text{Altura}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

- **Progressão aritmética:** $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$
- **Progressão geométrica:** $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Probabilidades e Estatística

Se X é uma variável aleatória discreta de valores x_i com probabilidade p_i, então:

- **Valor médio** de X:
  $\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$
- **Desvio padrão** de X:
  $\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é uma variável aleatória normal de valor médio μ e desvio padrão σ, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

1. O diâmetro biparietal de um feto, medido na trigésima quarta semana de gravidez, através de uma ecografia, permite calcular uma boa estimativa do perímetro cefálico do futuro recém-nascido, dado que existe uma correlação linear forte entre estas duas variáveis.

Os dados apresentados na tabela seguinte são relativos ao diâmetro biparietal, x, em centímetros, medido na trigésima quarta semana de gravidez, e ao correspondente perímetro cefálico, y, em centímetros, de recém-nascidos numa maternidade.

Diâmetro biparietal em cm (x)	**Perímetro cefálico** em cm (y)
7,49	30,36
7,81	31,99
8,21	33,66
8,23	34,22
8,30	35,26
8,66	35,51
8,76	34,86
8,97	36,44
9,04	35,30
9,07	36,97
9,24	37,63

Considere válido o modelo de regressão linear de y sobre x, obtido a partir dos dados apresentados na tabela.

Estime, com base neste modelo, o perímetro cefálico de um futuro recém-nascido, nesta maternidade, cujo diâmetro biparietal do feto, na trigésima quarta semana de gravidez, mede $8{,}46$ cm.

Na sua resposta, apresente:

– os valores dos parâmetros da equação da reta de regressão linear de y sobre x, arredondados às milésimas;

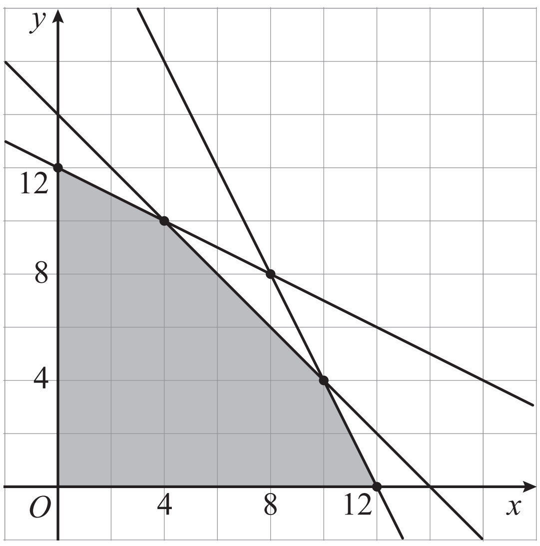
– o valor pedido em centímetros, arredondado às centésimas.

2. O seguinte sistema de restrições é referente a um problema de programação linear.

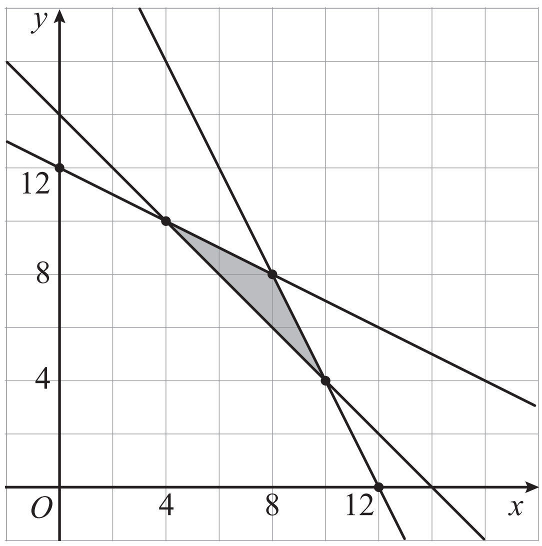
$$\begin{cases} 2x + y \leq 24 \\ x + 2y \leq 24 \\ x + y \leq 14 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Em qual das seguintes opções está representada, a sombreado, em referencial cartesiano, ortogonal e monométrico, Oxy, a região admissível correspondente a este sistema de restrições?

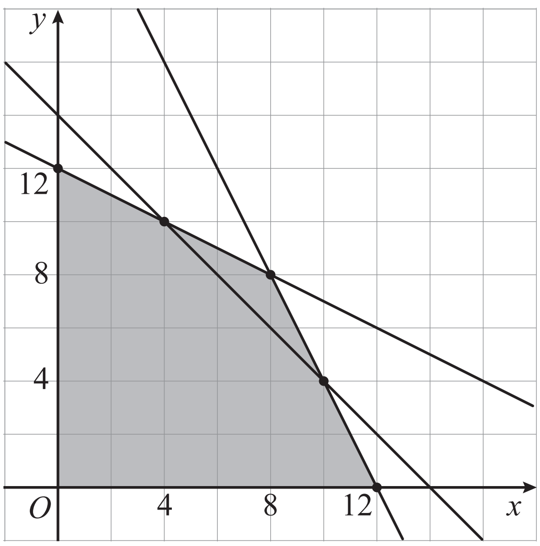
(A)



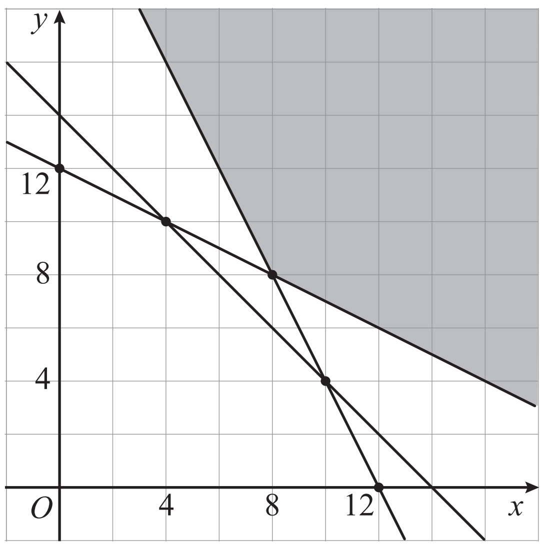
(B)



(C)



(D)



3. Admita que o número de elementos de uma população, a partir de um certo instante inicial, é bem modelado pela função definida por

$$a(t) = \frac{1000}{1+9e^{-0,1t}}, \text{ com } t \geq 0$$

em que $a(t)$ é o número de elementos da população, t meses após o instante inicial.

*** 3.1.** Complete o texto, de acordo com o modelo apresentado, selecionando a opção correta para cada espaço.

Escreva, na folha de respostas, apenas cada um dos números, **I**, **II** e **III**, seguido da opção, **a)**, **b)** ou **c)**, selecionada.

«No instante inicial, esta população tinha ____**I**____ elementos. Ao longo do tempo, o número de elementos da população é ____**II**____ e tenderá para ____**III**____.»

I	II	III
a) 10	**a)** decrescente	**a)** 100
b) 100	**b)** constante	**b)** 900
c) 1000	**c)** crescente	**c)** 1000

*** 3.2.** Determine, de acordo com o modelo apresentado, quanto tempo terá de decorrer até que o número de elementos desta população atinja 500.

Apresente o resultado em meses, arredondado às unidades.

4. Admita que uma abelha executa um voo em movimento retilíneo e uniforme, em frente à sua colmeia.

No esquema da Figura 1, que ilustra a situação:

- o ponto A representa o ponto de partida do voo da abelha, e o ponto B representa o ponto de chegada;
- o ponto C, equidistante de A e B, representa uma entrada da colmeia.

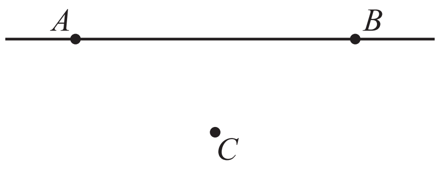


Figura 1

Seja $d(t)$ a distância, em metros, entre a posição da abelha e essa entrada da colmeia, t segundos após o início do voo, no percurso do ponto A para o ponto B.

Seja V a função que dá a taxa de variação instantânea da função d, para cada valor de t.

Na Figura 2, estão representados dois gráficos, I e II, em referencial cartesiano ortogonal.

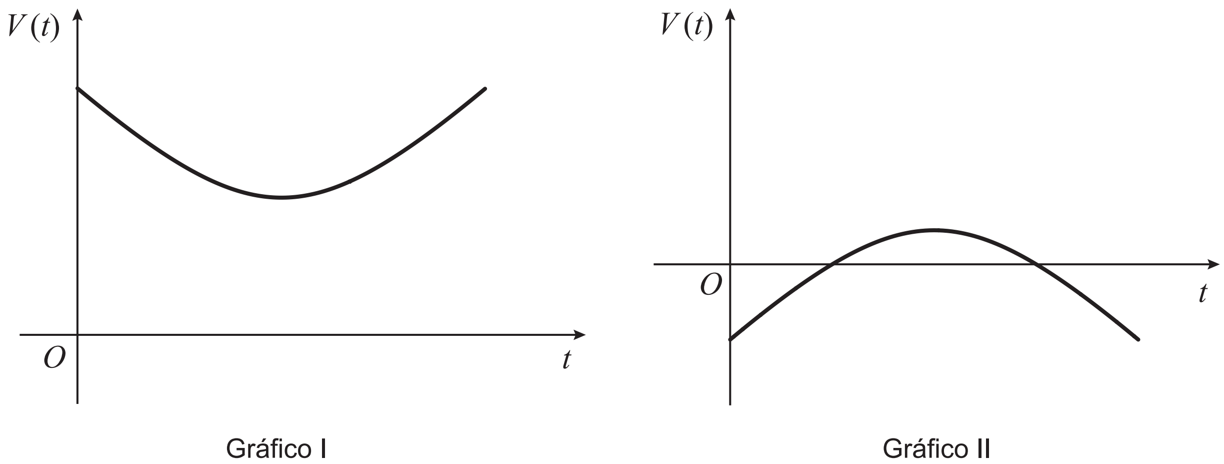


Figura 2

Justifique que nem o Gráfico I nem o Gráfico II podem representar a função V.

Apresente uma razão para cada um dos gráficos.

*** 5.** Lança-se, sobre uma mesa, um dado dodecaédrico equilibrado. Cada uma das doze faces do dado está numerada com 0 , 1 ou 2 .

Considere a variável aleatória X: «número da face que ficar voltada para baixo no lançamento».

A tabela seguinte apresenta a distribuição de probabilidades de X, em que k representa um número real.

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	k	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

Complete o texto, de acordo com a distribuição de probabilidades de X, selecionando a opção correta para cada espaço.

Escreva, na folha de respostas, apenas cada um dos números, **I**, **II** e **III**, seguido da opção, **a)**, **b)** ou **c)**, selecionada.

«Ao lançar-se o dado, a probabilidade de uma face com número 0 ficar voltada para baixo é igual a ______**I**______.

O dado tem ______**II**______ face(s) com o número 2 .

O valor médio da variável aleatória X é ______**III**______.»

I	**II**	**III**
a) $\frac{1}{3}$	**a)** uma	**a)** $\frac{1}{3}$
b) $\frac{1}{6}$	**b)** quatro	**b)** 1
c) $\frac{5}{6}$	**c)** seis	**c)** $\frac{7}{6}$

6. Na Figura 3, apresentam-se as três primeiras etapas da construção do Tapete de Sierpiński, feita a partir de um quadrado inicial (que não está representado na figura).

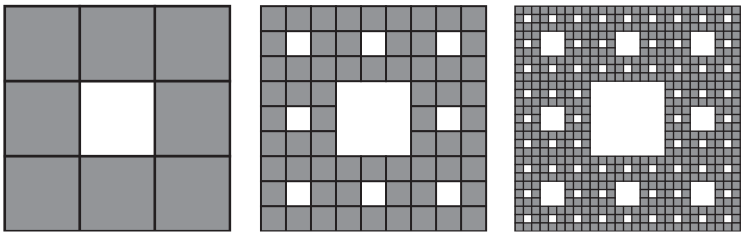


Figura 3

Nesta construção, tal como a figura sugere:

- na etapa 1, decompõe-se o quadrado inicial em 9 quadrados iguais e remove-se o quadrado central, obtendo-se 8 quadrados;
- em cada uma das etapas seguintes, decompõe-se cada um dos quadrados obtidos na etapa anterior em 9 quadrados iguais e removem-se os respetivos quadrados centrais.

Seja (u_n) a sucessão definida por $u_n = 8^n$, que dá o número de quadrados obtidos na etapa n .

* **6.1.** Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) (u_n) é uma progressão aritmética de razão 8 .

(B) (u_n) é uma progressão geométrica de razão 8 .

(C) (u_n) é uma progressão aritmética de razão $\frac{1}{8}$.

(D) (u_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{8}$.

6.2. Admita que o quadrado inicial tem 270 cm de lado.

Determine a área total dos quadrados obtidos na etapa 3 .

Apresente o resultado em centímetros quadrados.

7. Um automóvel circula num troço de autoestrada, sempre no mesmo sentido, em linha reta.

Admita que, a partir do instante em que o automóvel passa num ponto em que está localizado um radar, até ao instante em que o automóvel sai da autoestrada, a distância, $f(x)$, em quilómetros, percorrida pelo automóvel, em função do tempo decorrido, x, em minutos, é dada por

$$f(x) = \frac{11}{6}x - \frac{1}{3}x^2 \quad , \quad \text{com } 0 \leq x \leq 1{,}5$$

7.1. Nesta autoestrada, o limite de velocidade é de 120 quilómetros por hora.

Averigue se é cumprido o limite de velocidade no instante em que o automóvel passa pelo radar.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

7.2. Determine a distância percorrida pelo automóvel desde o instante em que passa pelo radar até ao instante em que sai da autoestrada.

Em cálculos intermédios, não proceda a arredondamentos.

8. Num restaurante, a musse de chocolate é servida em dois tipos de recipientes cilíndricos, como os apresentados na Figura 4.

Figura 4

A base de um dos recipientes tem 10 cm de diâmetro, enquanto a base do outro tem 5 cm de diâmetro, como se representa na Figura 5, que não está à escala.

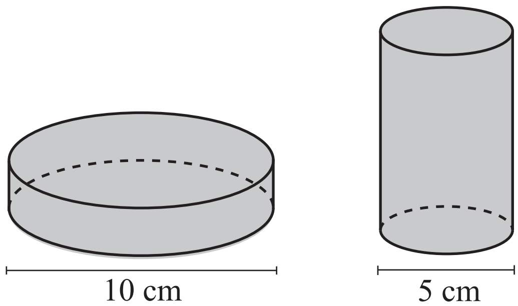


Figura 5

8.1. Os recipientes distinguem-se pelas dimensões da base e da altura, mas têm o mesmo volume.

O recipiente de base com maior diâmetro tem 2 cm de altura.

Determine a altura do outro recipiente, em centímetros.

Na sua resposta, não considere a espessura dos recipientes.

8.2. Na Figura 6, que não está à escala, estão representadas, em referencial ortogonal e monométrico, Oxy , a circunferência da base de um dos recipientes e a reta de equação $y = x$.

Sabe-se que:

- a circunferência tem o centro na origem do referencial;
- o ponto de coordenadas $(5, 0)$ pertence à circunferência;
- o ponto A é o ponto de intersecção da circunferência com a reta no primeiro quadrante.

No referencial, a unidade é o centímetro.

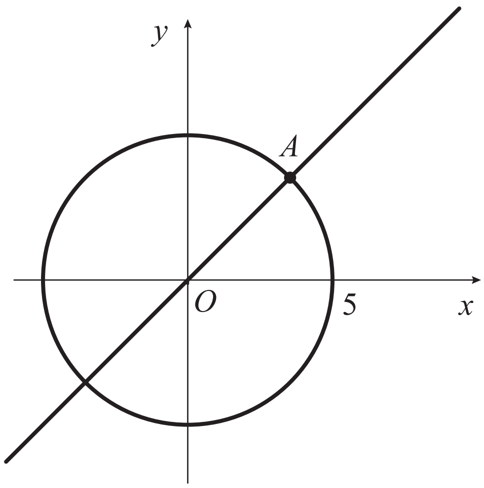


Figura 6

Seja B o ponto simétrico de A , relativamente ao eixo Ox .

Determine os valores exatos das coordenadas do ponto B .

9. Recorrendo a modelos trigonométricos, é possível prever a altura da maré (altura da água do mar relativamente ao Zero Hidrográfico), num determinado local.

As expressões «preia-mar» e «baixa-mar» designam, respetivamente, um valor máximo e um valor mínimo da altura da maré.

De acordo com as previsões do Instituto Hidrográfico para o dia 25 de abril de 2024, a altura da maré, no porto de Sesimbra, entre as $16\text{h}\ 18\text{min}$ e as $22\text{h}\ 23\text{min}$, instantes em que ocorrem dois valores extremos da altura da maré consecutivos, é dada, aproximadamente, por

$$h(t) = 2 + 1{,}2\cos\left(\frac{\pi}{6{,}08}t\right)$$

em que $h(t)$ é a altura da maré, em metros, t horas após as $16\text{h}\ 18\text{min}$ desse dia, até às $22\text{h}\ 23\text{min}$ do mesmo dia.

O argumento da função cosseno está em radianos.

9.1. A que horas é que a altura da maré terá sido de $1{,}5$ metros, naquele intervalo de tempo do dia 25 de abril de 2024, de acordo com o modelo apresentado?

Apresente o valor pedido em horas e minutos, com os minutos arredondados às unidades.

Em cálculos intermédios, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

* **9.2.** Determine, de acordo com o modelo apresentado, a taxa média de variação da altura da maré, no intervalo de tempo decorrido entre as referidas preia-mar e baixa-mar do dia 25 de abril de 2024.

Apresente o valor pedido em metros por hora, arredondado às décimas.

Em cálculos intermédios, conserve duas casas decimais.

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 9 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.**	**2.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.**	**5.**	**6.1.**	**8.2.**	**9.2.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	18	14	14	18	18	14	14	18	18	**146**
Destes 5 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**6.2.**	**7.1.**	**7.2.**	**8.1.**	**9.1.**					**Subtotal**
Cotação (em pontos)	3 × 18 pontos									**54**
TOTAL										**200**