REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E INOVAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

Prova 835 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2025

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 62/2023, de 25 de julho

Braille

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 19 Páginas

A prova inclui 10 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 4 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 2 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de calculadora.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário no final do enunciado da prova.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Em 2024, foi necessário eleger uma equipa de gestão das áreas concessionadas das praias de uma região. Nessa eleição, cada um dos concessionários teve direito a um voto numa das três listas que se apresentaram a votação: listas A, B e C.

A votação foi realizada a distância, com recurso a uma aplicação para telemóvel, na qual cada um dos votantes submetia o seu voto depois de selecionar a lista em que pretendia votar.

Na Tabela 1, está registado o número de votos, validamente expressos, obtidos por cada uma das listas concorrentes.

Tabela 1

Listas	N.º de votos
A	18
B	51
C	32

Item obrigatório

1.1. Selecionou-se, ao acaso, um dos votos registados na Tabela 1.

Qual é a probabilidade de esse voto ter sido atribuído à lista A, sabendo-se que não foi atribuído à lista C?

a) $\frac{6}{23}$

b) $\frac{18}{101}$

c) $\frac{9}{16}$

d) $\frac{69}{101}$

Item obrigatório

1.2. A equipa de gestão pode integrar candidatos das três listas e é constituída por um determinado número de elementos (mandatos).

O apuramento do número de candidatos de cada lista que vão integrar a equipa de gestão resulta da conversão do número de votos em mandatos pelo método a seguir descrito.

- Divide-se o número de votos de cada lista, sucessivamente, por 1, 2, 3, 4, 5, etc.
- Ordenam-se os quocientes obtidos, por ordem decrescente, numa série de tantos termos quantos os mandatos previstos.
- Atribuem-se os mandatos às listas a que correspondem os termos da série estabelecida pela regra anterior, recebendo cada uma das listas tantos mandatos quantos os seus termos na série.
- No caso de ficar somente um mandato por atribuir e de os termos seguintes da série serem iguais e correspondentes a listas diferentes, o mandato é atribuído à lista que tiver menor número de votos.

Na Tabela 2, apresentam-se, por ordem, os nomes dos primeiros seis candidatos da Lista B.

Tabela 2

LISTA B	
N.º	Candidatos
1	Camila Ferreira
2	Manuel Pedro
3	Guilherme Santos
4	Leonor Sousa
5	Joana Almeida
6	Pedro Ribeiro

Se, por exemplo, fossem atribuídos dois mandatos à lista B, os candidatos números 1 e 2, respetivamente, Camila Ferreira e Manuel Pedro, teriam integrado a equipa.

No apuramento dos resultados, por aplicação do método descrito, verificou-se que Joana Almeida, candidata número 5 da Lista B, foi o penúltimo elemento a integrar a equipa de gestão.

Determine o número de elementos da equipa de gestão.

Na sua resposta, apresente quantos elementos de cada lista compõem essa equipa.

Caso proceda a arrendondamentos nos quocientes resultantes da aplicação do método descrito, conserve uma casa decimal.

Item obrigatório

2. A Carla, o Edgar, o José, a Lurdes e a Paula são cinco primos que, certo dia, fizeram um lanche na praia. Encomendaram uma piza, que dividiram pelos cinco. De modo a realizar uma divisão que cada um considerasse justa, aplicaram o algoritmo a seguir descrito.

1.º passo: Atribui-se, aleatoriamente, uma ordem aos primos. Considere-se que a ordem atribuída foi A, B, C, D e E.

2.º passo: O primo A delimita uma parte da piza que considera corresponder a $\frac{1}{5}$ do total, visto serem cinco os intervenientes iniciais.

3.º passo: O primo B pronuncia-se, concordando com a delimitação efetuada, ou dela discordando:

- se considera que a parte delimitada corresponde a $\frac{1}{5}$ da piza (ou menos), passa a vez ao primo seguinte;
- se considera que a parte delimitada é mais do que $\frac{1}{5}$ da piza, retifica-a e passa a vez ao primo seguinte.

4.º passo: O primo C repete o procedimento do 3.º passo e passa a vez ao primo D.

5.º passo: O primo D repete o procedimento do 3.º passo e passa a vez ao primo E.

6.º passo: O primo E pronuncia-se:

- se concorda com a delimitação efetuada, atribui a parte da piza resultante de todo este processo ao último primo que a tenha retificado ou, caso ninguém a tenha retificado, entrega-a ao primo A;
- se discorda da delimitação efetuada, retifica a parte da piza, e esta é-lhe entregue.

Termina assim a primeira volta, saindo o primo que acabou de receber esta parte da piza.

7.º passo: A segunda volta faz-se com o que resta da piza e inicia-se no primo a seguir ao que acabou de receber a sua parte na volta anterior, mantendo-se a ordem entre os restantes primos.

8.º passo: Realizam-se as voltas necessárias, sempre com um primo a menos do que na volta anterior, até restarem apenas dois primos. Na última volta, só com dois primos, um divide e o outro escolhe. Termina, assim, a divisão da piza pelos cinco primos.

Para a divisão da piza, a ordem atribuída aleatoriamente foi: Lurdes, Carla, José, Edgar e Paula.

Admita que:

– na primeira e na terceira voltas, todos retificaram a parte da piza na sua vez;

– na segunda volta, o José foi o único primo que retificou a parte da piza na sua vez.

Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço.

Escreva na folha de respostas cada um dos números, I, II, III e IV, seguido da opção, a), b) ou c), selecionada. A cada espaço corresponde uma só opção.

O José ficou com a sua parte da piza na ___I___ volta. A ___II___ iniciou duas voltas. O número de primos que não iniciaram qualquer volta foi igual a ___III___ . O Edgar foi um dos primos que, juntamente com a ___IV___ , obtiveram a sua parte da piza na última volta.

I

a) primeira

b) segunda

c) terceira

II

a) Lurdes

b) Carla

c) Paula

III

a) um

b) dois

c) três

IV

a) Lurdes

b) Carla

c) Paula

Item obrigatório

3. Para preparar as férias, o Edgar tem de concretizar seis tarefas, T1, T2, T3, T4, T5 e T6. Como algumas destas tarefas só podem ter início depois de outras tarefas já terem sido concluídas, o Edgar organizou a informação numa tabela.

A Tabela 3 apresenta o número de dias necessário à concretização da respetiva tarefa (Duração) e, quando é o caso, quais as tarefas que devem ser previamente concluídas (Tarefas precedentes).

Tabela 3

Tarefa	Duração, em dias	Tarefas precedentes
T1	2	–
T2	3	T1
T3	1	T4
T4	4	–
T5	1	T2 , T3 , T4
T6	4	T1

Por exemplo, a tarefa T3 só poderá ter início depois da conclusão da tarefa T4, sendo necessários quatro dias para concretizar a tarefa T4 e um dia para concretizar a tarefa T3.

Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço.

Escreva na folha de respostas cada um dos números, I, II, III e IV, seguido da opção, a), b) ou c), selecionada. A cada espaço corresponde uma só opção.

Com base na Tabela 3, o Edgar determinou o número mínimo de dias para a concretização das seis tarefas, programando a realização de tarefas em simultâneo, sempre que possível, e respeitando as precedências definidas.

Antes de dar início à tarefa T5, o Edgar tem de concluir, no mínimo, ____I____ tarefas. Até dar por concluída a tarefa T3, são necessários, no mínimo, ____II____ dias. Para concluir todas as tarefas, no número mínimo de dias, o Edgar tem de iniciar, nomeadamente, as tarefas ____III____ em simultâneo. O Edgar necessita, no mínimo, de ____IV____ dias para concretizar todas as tarefas.

I

a) 3

b) 4

c) 5

II

a) 3

b) 4

c) 5

III

a) T2 e T6

b) T3 e T5

c) T4 e T5

IV

a) 11

b) 6

c) 5

4. Para planear uma caminhada, de ida e volta, de sua casa (C) até à Marina de Vilamoura (V), a Leonor decidiu que iria passar por quatro locais: EB 2,3 D. Dinis (E); Mercados de Fruta e Peixe (M); Praia da Marina (P) e Quinta do Romão (Q).

Na Tabela 4, apresentam-se as distâncias, em metros, entre cada dois dos seis locais.

Tabela 4

Distância entre os locais, em metros	
C – M	382
C – Q	355
C – E	748
E – Q	350
E – V	1250
V – P	550
P – M	1260
P – Q	1100

A Leonor decidiu que o percurso a realizar resultaria da aplicação do método seguinte.

- Escolher a menor distância entre os seis locais, qualquer que ela seja.
- Escolher sucessivamente as menores distâncias, garantindo que, partindo do mesmo local, são selecionadas, no máximo, duas distâncias e não permitindo que se fechem percursos sem que todos os locais sejam visitados.

Apresente um possível percurso definido pela Leonor para a sua caminhada.

Na sua resposta, apresente:

– a ordenação das distâncias selecionadas pelo método descrito;

– um percurso que a Leonor poderá ter definido.

5. Numa praia do Algarve, uma empresa aluga equipamento para a prática de *windsurf*.

Quando devolvem o equipamento alugado, os clientes recebem um código que lhes permite avaliar a experiência, uma única vez, no sítio da empresa na Internet. Para o efeito, atribuem à experiência de uma a cinco estrelas, significando uma estrela que a experiência foi pouco gratificante, e cinco estrelas que a experiência foi extremamente gratificante.

Dos clientes que avaliaram a experiência até t meses após o início do ano de 2022, a percentagem, E, dos que lhe atribuíram, pelo menos, 4 estrelas é bem aproximada pelo modelo seguinte, com arredondamento às décimas.

$$E(t) = \frac{84}{1+11e^{-0,2t}} \qquad (t \geq 0)$$

Por exemplo, a percentagem de clientes que atribuíram, pelo menos, 4 estrelas à experiência até ao início de fevereiro de 2022 é igual a $8,4\%$, pois $E(1) = 8,3949...$

Item obrigatório

5.1. Admita que 600 clientes tinham avaliado a experiência até ao início de março de 2022.

Quantos destes clientes lhe atribuíram, pelo menos, 4 estrelas?

a) 60

b) 70

c) 80

d) 90

5.2. No sítio da empresa na Internet, é apresentado um quadro com o resultado das avaliações realizadas até ao momento, que é atualizado sempre que alguém realiza uma nova avaliação.

Num determinado momento, o quadro foi atualizado, passando a apresentar os valores registados na Tabela 5.

Tabela 5

N.º de estrelas atribuídas	N.º de clientes
Uma	50
Duas	150
Três	200
Quatro	770
Cinco	430

Escreva uma equação que lhe permita determinar o mês e o ano em que ocorreu esta atualização.

Não resolva a equação.

Item obrigatório

5.3. A evolução da percentagem de clientes que, no sítio da empresa na Internet, atribuíram 3 estrelas à experiência, até t meses após o início do ano de 2022, pode ser modelada por uma função N.

Sabe-se que:

- $N(0) = 40$;
- A função N é decrescente e, com o passar do tempo, tende para 10% .

Considerando-se a percentagem, E , dos clientes que atribuíram, pelo menos, 4 estrelas e a percentagem, N , dos clientes que atribuíram 3 estrelas à experiência, verifica-se que

$E(4{,}25) = N(4{,}25)$.

Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço.

Escreva na folha de respostas cada um dos números, I, II, III e IV, seguido da opção, a), b) ou c), selecionada. A cada espaço corresponde uma só opção.

Nos primeiros dois anos, a percentagem de clientes que atribuíram, pelo menos, 4 estrelas à experiência é ____I____ .
No início do ano de 2022, a percentagem de clientes que atribuíram, pelo menos, 4 estrelas à experiência era ____II____ à percentagem de clientes que lhe atribuíram 3 estrelas, verificando-se que o contrário ocorreu pela primeira vez no decorrer do mês de ____III____ de 2022.
Com o passar do tempo, a percentagem de clientes que atribuíram, no máximo, 2 estrelas à experiência tende para ____IV____ .

I

a) crescente

b) constante

c) decrescente

II

a) superior

b) igual

c) inferior

III

a) abril

b) maio

c) junho

IV

a) 6%

b) 16%

c) 26%

6. Numa praia frequentada pela Leonor, é possível realizar passeios de gaivota (G), de canoa (C) ou de barco (B).

Nas tabelas 6, 7 e 8, apresenta-se a informação recolhida junto de 400 pessoas que realizaram, cada uma, apenas um dos passeios referidos e que tinham idades compreendidas entre os 18 e os 49 anos.

Tabela 6

Tipo de passeio	N.º de pessoas
G	200
C	120
B	80

Tabela 7 – **Percentagem** de pessoas por tipo de passeio e respetiva duração, em horas

	Tipo de passeio		
Duração, em horas	G	C	B
]0, 1]	50	60	40
]1, 2]	25	30	20
]2, 3]	25	10	40

Tabela 8 – Número de pessoas por classe etária, em anos, e tipo de passeio

	Tipo de passeio		
Classe etária	G	C	B
[18, 26[	80	28	22
[26, 34[	80	57	25
[34, 42[	24	27	25
[42, 50[	16	8	8

Item obrigatório

6.1. Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço.

Escreva na folha de respostas cada um dos números, I, II, III e IV, seguido da opção, a), b) ou c), selecionada. A cada espaço corresponde uma só opção.

O número de pessoas que realizaram passeios com duração superior a duas horas foi ___I___ . Dos passeios com duração inferior ou igual a uma hora, o que registou o maior número de pessoas foi o passeio de ___II___ . No que respeita às pessoas que realizaram um passeio de barco, verifica-se que a mediana das suas idades pertence à classe ___III___ , e que a percentagem das que têm idade inferior a 34 anos é igual a ___IV___ .

I

a) 94

b) 75

c) 68

II

a) barco

b) canoa

c) gaivota

III

a) $[18, 26[$

b) $[26, 34[$

c) $[34, 42[$

IV

a) $41{,}25\%$

b) $58{,}75\%$

c) 90%

Item obrigatório

6.2. De acordo com os dados apresentados nas tabelas 6, 7 e 8, e mantendo as classes utilizadas, foi construída uma tabela de frequências relativas acumuladas para a idade das 400 pessoas.

Qual é o valor da frequência relativa acumulada da classe $[26, 34[$?

a) $0{,}33$

b) $0{,}41$

c) $0{,}67$

d) $0{,}73$

6.3. Considere que as idades se distribuem uniformemente em cada uma das classes etárias apresentadas na Tabela 8.

Às 200 pessoas que realizaram um passeio de gaivota, cujas idades são apresentadas na Tabela 8, juntou-se um grupo de 24 pessoas (Grupo A), todas da mesma idade, que realizaram o mesmo tipo de passeio.

Estima-se que a média das idades destas 224 pessoas é 30 anos.

A que classe etária, das indicadas na Tabela 8, pertence a idade de cada uma das pessoas do Grupo A? Justifique a sua resposta.

7. Em várias praias, umas da região do Algarve e outras da região Norte, inquiriu-se um conjunto de pessoas que saíam da praia acerca do tempo que estiveram dentro de água da última vez que foram ao banho.

A Tabela 9, parcialmente preenchida, apresenta os dados referentes às 4200 pessoas que referiram ter estado menos de 15 minutos dentro de água da última vez que foram ao banho.

Tabela 9 – Número de pessoas que referiram ter estado menos de 15 minutos dentro de água da última vez que foram ao banho

Legenda da Tabela 9

X – N.º de menores de idade

Y – N.º de maiores de idade

A – N.º de pessoas inquiridas em praias da região do Algarve

N – N.º de pessoas inquiridas em praias da região Norte

	Idade		
	X	Y	Total
A	275		
N	225		
Total	500	3700	4200

7.1. Escolhem-se, ao acaso, dois dos menores de idade cujas respostas estão registadas na Tabela 9.

Determine a probabilidade de ambos terem sido inquiridos em praias da mesma região.

Apresente o resultado na forma de dízima, com arredondamento às décimas.

Item obrigatório

7.2. Admita que, nas praias da região do Algarve, foram inquiridas $100\ 000$ pessoas, e que a variável aleatória «tempo, em minutos, que as pessoas, inquiridas nas praias do Algarve, estiveram dentro de água da última vez que foram ao banho» é bem modelada por uma distribuição normal, de valor médio 20 minutos e desvio padrão $2{,}5$ minutos.

Seleciona-se, ao acaso, um dos maiores de idade mencionados na Tabela 9.

Determine a probabilidade de essa pessoa ter sido inquirida numa praia da região do Algarve. Apresente o resultado na forma de dízima, com arredondamento às centésimas.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve cinco casas decimais.

Sugestão: Comece por determinar o número de pessoas inquiridas em praias da região do Algarve que referiram ter estado menos de 15 minutos dentro de água da última vez que foram ao banho.

Item obrigatório

8. Numa das praias da região do Algarve, inquiriram-se 1600 pessoas relativamente ao tempo despendido, em minutos, na deslocação entre o seu alojamento e a praia.

Na Tabela 10, apresentam-se os dados recolhidos.

Tabela 10

Tempo, em minutos	N.º de pessoas
$]0, 15]$	350
$]15, 30]$	850
$]30, 45]$	180
$]45, 60]$	220

Recorrendo aos dados da Tabela 10, construa um intervalo de confiança a 99% para a proporção de pessoas que, na deslocação entre o seu alojamento e a praia, despenderam, no máximo, 30 minutos.

Apresente os valores dos extremos do intervalo arredondados às centésimas.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve quatro casas decimais.

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 10 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.

1.1.	....	15 pontos
1.2.	....	19 pontos
2.	....	15 pontos
3.	....	15 pontos
5.1.	....	15 pontos
5.3.	....	15 pontos
6.1.	....	15 pontos
6.2.	....	15 pontos
7.2.	....	19 pontos
8.	....	19 pontos

SUBTOTAL .... 162 pontos

Destes 4 itens, contribuem para a classificação final da prova os 2 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação. (2 x 19 pontos = 38 pontos)

4., 5.2., 6.3., 7.1.

SUBTOTAL .... 38 pontos

TOTAL .... 200 pontos

Formulário

Modelos de grafos

Condição necessária e suficiente para que um grafo conexo admita circuitos de Euler

Um grafo conexo admite circuitos de Euler se e só se todos os seus vértices forem de grau par.

Modelos de probabilidade

Teorema da probabilidade total e regra de Bayes

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) = P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B) \times P(A \mid B)}{P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})}$$

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) =$$

$$= P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)$$

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} = \frac{P(B_k) \times P(A \mid B_k)}{P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)}$$

podendo k tomar os valores $1, 2$ ou 3

Modelo normal

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Intervalos de confiança

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável normal X, admitindo que se conhece o desvio padrão da variável

$$\left]\overline{x} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\overline{x}$ – média amostral

σ – desvio padrão da variável

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável X, admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left]\overline{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\overline{x}$ – média amostral

s – desvio padrão amostral

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para uma proporção p, admitindo que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left]p - z\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}},\quad p + z\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

p – proporção amostral

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

(*) Valores de z para os níveis de confiança mais usuais

Nível de confiança	z
90%	1,645
95%	1,960
99%	2,576