REPÚBLICA PORTUGUESA

EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E INOVAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

Prova 835 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2025

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 62/2023, de 25 de julho

Braille

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 19 Páginas

---

A prova inclui 10 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 4 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 2 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de calculadora.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário no final do enunciado da prova.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

A corrida em trilhos ou corrida todo o terreno é um desporto que consiste em correr em trilhos através de montanhas e colinas, cruzando riachos e rios, com subidas e descidas íngremes. No nosso país, realizam-se diversas provas deste tipo, normalmente designadas por *trail*.

1. A Luísa pretende inscrever-se numa das provas seguintes: *Trail* dos Abutres (A), *Trail* dos Morcegos (M), *Trail* da Serra d'Arga (S) ou *Trail* das Linhas de Torres (T).

   Para selecionar a prova na qual se vai inscrever, a Luísa solicitou a cada um dos colegas de turma que ordenasse numa lista de preferências, uma única vez, as quatro provas.

Item obrigatório

1.1. O Xavier, um dos colegas da Luísa, ordenou as quatro provas aleatoriamente.

Qual é a probabilidade de o Xavier ter colocado na sua lista de preferências o *Trail* dos Abutres e o *Trail* da Serra d'Arga, não necessariamente por esta ordem, nos dois primeiros lugares?

a) $\frac{1}{4}$

b) $\frac{1}{3}$

c) $\frac{1}{2}$

d) $\frac{1}{6}$

Item obrigatório

1.2. Admita que a ordenação das quatro provas, efetuada por cada colega da Luísa, corresponde a um voto, e que foram apurados 27 votos válidos.

Na Tabela 1, apresentam-se as quatro listas de preferências resultantes da votação e o respetivo número de votos.

Tabela 1

	N.º de votos			
Preferências	8	7	4	8
1.ª	M	T	A	A
2.ª	S	M	S	T
3.ª	T	S	M	S
4.ª	A	A	T	M

Para selecionar a prova, a Luísa recorreu ao método a seguir descrito.

- Efetua-se a contagem do número de primeiras preferências de cada prova e verifica-se se alguma delas obtém a maioria absoluta na primeira preferência. Caso isso se verifique, essa prova será a escolhida.
- Caso contrário, efetua-se a contagem do número de últimas preferências de cada prova e elimina-se a prova (ou provas, em caso de empate) com mais votos na última preferência. A tabela de preferências é, em seguida, reestruturada, e, em cada coluna, as provas que ocupavam os lugares abaixo da(s) prova(s) eliminada(s) sobem uma linha (ou as necessárias, em caso de empate), mantendo-se pela mesma ordem.
- Os procedimentos anteriores são aplicados à tabela de preferências obtida no ponto anterior.
- O processo repete-se até que uma das provas obtenha a maioria absoluta na primeira preferência.

Determine, por aplicação do método descrito, qual a prova selecionada pela Luísa.

Na sua resposta, apresente todos os cálculos efetuados.

Item obrigatório

2. A Ana, o Francisco e a Manuela são três amigos que, em equipa, ganharam dois dos *trails* em que participaram. Em cada um desses *trails*, a equipa ganhou um prémio.

   Para distribuírem os dois prémios, X e Y, a Ana (A), o Francisco (F) e a Manuela (M) acordaram na utilização do método a seguir descrito.

   - Cada amigo atribui, secretamente, um valor monetário a cada um dos dois prémios e coloca o registo dessas licitações dentro de um envelope fechado. Em seguida, os envelopes são abertos, e os valores das licitações são registados numa tabela.
   - Determina-se o valor global atribuído aos prémios por cada amigo e o valor que cada um considera justo receber. Assume-se que o valor que cada amigo considera justo receber é igual a um terço do valor global que ele atribuiu ao conjunto dos dois prémios.
   - Cada prémio é destinado ao amigo que mais o valoriza, considerando-se que esse amigo recebe o equivalente ao valor monetário que atribuiu ao respetivo prémio.
   - No caso do(s) amigo(s) que não receba(m) qualquer prémio, considera-se, para efeito dos cálculos seguintes, que o valor monetário recebido por esse(s) amigo(s) é zero euros.
   - Caso o valor do(s) prémio(s) recebido(s) por um amigo ultrapasse o valor que este considerava justo receber, esse amigo disponibiliza, em dinheiro, o respetivo excedente. Caso contrário, esse amigo deverá receber, em dinheiro, do montante à disposição, o valor em falta, tendo em conta o que considerava justo receber.
   - Após os procedimentos anteriores, caso ainda reste dinheiro, este é distribuído em partes iguais pelos três amigos.

Na Tabela 2, estão registados os valores, em euros, atribuídos por cada amigo nas licitações secretas.

Tabela 2

Amigo	Prémio	
	X	Y
A	75	102
F	120	90
M	70	65

Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço.

Escreva na folha de respostas cada um dos números, I, II, III e IV, seguido da opção, a), b) ou c), selecionada. A cada espaço corresponde uma só opção.

O Francisco considera que o valor global dos dois prémios é ____I____ , e 59 € é o valor que ____II____ considera justo receber. Concluída a aplicação do método descrito, ____III____ não fica com nenhum prémio, mas recebe um total de ____IV____ .

I

a) 210 €

b) 177 €

c) 135 €

II

a) a Ana

b) o Francisco

c) a Manuela

III

a) a Ana

b) o Francisco

c) a Manuela

IV

a) 16 €

b) 45 €

c) 61 €

3. O *Trail* das Linhas de Torres 100 (LT100) pretende homenagear as Linhas de Torres Vedras, classificadas como monumento nacional.

O LT100 tem uma extensão máxima de 100 km, num percurso de Torres Vedras a Vila Franca de Xira, e integra, entre outras:

- uma prova com 100 km de extensão, realizada individualmente, designada K100;
- uma prova com 100 km de extensão, realizada em estafetas por equipas de duas pessoas, designada K100/2;
- uma prova com 50 km de extensão, realizada individualmente, designada K50.

Na Tabela 3, apresentam-se os valores monetários, em euros, das inscrições, por pessoa, em função da prova e da data da inscrição, e o valor, em euros, a adicionar à inscrição, caso o participante deseje reservar transporte entre o local da meta e o local de partida.

Tabela 3

Legenda da Tabela 3

P1 – Setembro de 2024
P2 – Outubro e novembro de 2024
P3 – Dezembro de 2024
P4 – Janeiro de 2025
T – Transporte

Data	Prova		
	K100	K100/2	K50
P1	60	30	30
P2	70	35	35
P3	80	40	45
P4	90	45	50
T	4	4	3

Uma empresa de Torres Vedras, para incentivar a participação no LT100, anunciou que comparticiparia 60% do total das despesas referentes à inscrição e ao transporte dos seus trabalhadores.

Admita que, desta empresa, se inscreveram:

- dois trabalhadores, na prova K100, um em setembro de 2024 e um em janeiro de 2025;
- uma equipa de trabalhadores, na prova K100/2, em dezembro de 2024;
- quatro trabalhadores, na prova K50, em outubro de 2024.

Apenas os dois trabalhadores que se inscreveram na prova K100 não reservaram transporte.

Determine o valor, em euros, comparticipado pela empresa.

Item obrigatório

4. A equipa organizadora de uma prova de *trail* pretende definir um percurso que passe, obrigatoriamente, pelos cinco postos de controlo: C1, C2, C3, C4 e C5.

Na Tabela 4, estão registadas as distâncias mínimas, em metros, entre cada dois postos de controlo.

Tabela 4

Distância entre os postos de controlo, em metros	
C1 – C2	2770
C1 – C3	2400
C1 – C4	2260
C1 – C5	1780
C2 – C3	2370
C2 – C4	2360
C2 – C5	2550
C3 – C4	2225
C3 – C5	2660
C4 – C5	3100

A equipa organizadora decidiu que a prova teria início no posto de controlo C2 e terminaria num dos restantes postos de controlo.

Para definir o percurso, a equipa optou por aplicar o método a seguir descrito.

- Seleciona-se o posto de controlo seguinte, tendo em conta que:
  - deve ser o mais próximo possível;
  - se houver dois postos à mesma distância, a seleção é aleatória.
- Procede-se como foi indicado no ponto anterior, não se repetindo nenhum posto de controlo, e terminando após a passagem por todos os postos de controlo.

Determine o comprimento do percurso da prova, respeitando as condições definidas pela equipa organizadora.

Na sua resposta:

- identifique as distâncias entre os diferentes postos de controlo selecionados que resultem da aplicação do método descrito;
- apresente a ordem de passagem pelos postos de controlo.

5. Existem diversas aplicações para telemóvel que permitem aos utilizadores a monitorização, em tempo real, do percurso realizado durante uma caminhada. A AppCaminhadas e a AppTrilhos são duas dessas aplicações.

Admita que, em Portugal, o número de utilizadores da AppCaminhadas, em milhares, decorridos t anos após o início do ano 2000, é bem aproximado pelo modelo C, definido por

$$C(t) = 20 + 5\log_{10}(9t + 10) \qquad (t \geq 0)$$

Item obrigatório

5.1. Nas tabelas 5, 6 e 7, apresenta-se, para três regiões de Portugal continental (Norte, Centro e Lisboa e Vale do Tejo), o número de utilizadores da AppCaminhadas, em milhares, no início dos anos de 2010, de 2011 e de 2012.

Tabela 5 – Região Norte

Início do ano	N.º de utilizadores (em milhares)
2010	5,184
2011	5,249
2012	5,314

Tabela 6 – Região Centro

Início do ano	N.º de utilizadores (em milhares)
2010	4,92
2011	6,561
2012	7,032

Tabela 7 – Região de Lisboa e Vale do Tejo

Início do ano	N.º de utilizadores (em milhares)
2010	6,7
2011	8,717
2012	4,337

Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço.

Escreva na folha de respostas cada um dos números, I, II, III e IV, seguido da opção, a), b) ou c), selecionada. A cada espaço corresponde uma só opção.

Nos primeiros dez anos, após o início do ano 2000, em Portugal, o número de utilizadores da AppCaminhadas teve um aumento de ___I___ milhares de utilizadores. Comparando o número de utilizadores da AppCaminhadas no início dos anos de 2010, de 2011 e de 2012, apresentados nas tabelas 5, 6 e 7, conclui-se que é na região ___II___ que o número de utilizadores poderá apresentar um crescimento linear.

No início de 2012, em Portugal, um sétimo do número de utilizadores da AppCaminhadas pertencia à região ___III___ .

No início de 2011, em Portugal, a percentagem, arredondada às unidades, do número de utilizadores da AppCaminhadas que pertencia às regiões Norte, Centro e de Lisboa e Vale do Tejo era ___IV___ .

I

a) 30

b) 25

c) 5

II

a) Norte

b) Centro

c) de Lisboa e Vale do Tejo

III

a) Norte

b) Centro

c) de Lisboa e Vale do Tejo

IV

a) 87%

b) 68%

c) 47%

5.2. Para os que mais apreciam caminhadas, é possível subscrever a versão *Premium* da AppCaminhadas, um serviço exclusivo com mais funcionalidades, mas sujeito a pagamento.

Admita que, num determinado ano, 20% dos utilizadores da AppCaminhadas em Portugal subscreveram a versão *Premium*, o que corresponde a 5600 subscritores.

Escreva uma equação que lhe permita determinar o ano em que tal ocorreu.

Não resolva a equação.

Item obrigatório

5.3. Em Portugal, o número de utilizadores da aplicação AppTrilhos, em milhares, decorridos t anos após o início do ano 2000, é bem aproximado por um modelo T.

Admita que, em Portugal, no início do ano de 2015, a AppCaminhadas tinha mais 3000 utilizadores do que a AppTrilhos.

Qual das expressões seguintes traduz a afirmação anterior?

a) $C(15) = 3 + T(15)$

b) $C(15) = 3 \times T(15)$

c) $C(15) = 3000 + T(15)$

d) $C(15) = 3000 \times T(15)$

6. O VO2max, que é o volume máximo de oxigénio que uma pessoa pode consumir durante a realização de exercícios intensos, será tanto maior quanto melhor for a condição física dessa pessoa. Constitui um indicador importante da capacidade aeróbica e da eficiência cardiovascular de uma pessoa, permitindo comparar o desempenho aeróbico de diferentes indivíduos, mesmo com diferentes massas corporais.

   A unidade de medida do VO2max é expressa em mililitros de oxigénio por quilograma de massa corporal, por minuto.

Item obrigatório

6.1. Uma equipa estudou o valor do VO2max dos utilizadores da aplicação AppCaminhadas, em função da idade, em anos.

Na Tabela 8, apresenta-se a informação relativa ao valor do VO2max dos utilizadores da AppCaminhadas, em função da idade, no percentil 40 (P40), no percentil 60 (P60) e no percentil 80 (P80).

Tabela 8

	Idade (anos)		
	25	45	65
P40	40	35	30
P60	45	40	35
P80	50	45	40

Com base nos dados apresentados na Tabela 8, podemos concluir que um utilizador da AppCaminhadas com 65 anos de idade e com um VO2max igual a 35 se encontra no percentil 60. Ou seja, considerando-se os utilizadores da AppCaminhadas com 65 anos de idade, espera-se que, pelo menos, 60% tenham um VO2max inferior ou igual a 35.

Numa amostra com 200 utilizadores da AppCaminhadas, com 25 anos de idade, qual é o número mínimo dos que se espera que tenham um valor de VO2max inferior ou igual a 45?

a) 190

b) 120

c) 90

d) 45

Item obrigatório

6.2. Foram recolhidos os valores do VO2max de alguns dos utilizadores da aplicação AppCaminhadas no momento em que terminaram uma caminhada. Os valores recolhidos serviram de base à construção das tabelas 9 e 10.

Tabela 9

Legenda da Tabela 9

Fri – Frequência relativa acumulada

VO2max	Fri
[10,20[	18%
[20,30[	48%
[30,40[	60%
[40,50[	80%
[50,60[	100%

Tabela 10 – Valores dos extremos e dos quartis

	Valor
Mínimo	x
1.º quartil	y
2.º quartil	32
3.º quartil	48
Máximo	58

Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço.

Escreva na folha de respostas cada um dos números, I, II, III e IV, seguido da opção, a), b) ou c), selecionada. A cada espaço corresponde uma só opção.

A classe modal dos dados recolhidos foi a classe ____I____ , e a classe à qual corresponde o menor número de utilizadores foi a classe ____II____ .
Na Tabela 10, um possível valor de x é ____III____ , e um possível valor de y é ____IV____ .

I

a) [10,20[

b) [20,30[

c) [30,40[

II

a) [10,20[

b) [20,30[

c) [30,40[

III

a) 11

b) 9

c) 7

IV

a) 31

b) 22

c) 18

Item obrigatório

6.3. Admita que, no diagrama de caule-e-folhas apresentado, estão registadas as medições do VO2max realizadas num grupo A composto por 12 pessoas. O algarismo das dezenas de cada registo é apresentado no caule, e o algarismo das unidades é apresentado nas folhas.

2	0					
3	7	7	9			
4	1	1	1	3	6	6
5	2	2				

Mais tarde, fizeram-se medições num outro grupo, grupo B, composto por 24 pessoas.

Determine a média do VO2max das pessoas do grupo B, sabendo-se que, no conjunto das 36 pessoas, a média do VO2max era 45.

6.4. Os praticantes de atletismo podem recorrer a estudos teóricos para prever o tempo mínimo necessário para concluir uma maratona, tendo em conta o valor do VO2max medido no início da maratona.

Num estudo teórico, relacionou-se cada valor do VO2max (x), com a previsão do tempo mínimo (y), em minutos, necessário para concluir uma maratona.

Admita que a relação entre as variáveis x e y é bem aproximada por uma regressão linear definida por $y = -2{,}617x + 331{,}8$.

Um praticante de atletismo, no momento em que iniciou uma maratona, tinha um VO2max igual a 50.

Estime o tempo mínimo necessário para que o praticante de atletismo conclua essa maratona, com base no modelo de regressão linear.

Apresente o resultado em minutos, arredondado às unidades.

7. Nas várias edições de uma determinada prova de *trail*, recolheram-se diversos dados dos inscritos, que, ao longo dos anos, serviram de base para a realização de um estudo estatístico.

7.1. Junto dos inscritos na edição de 2024 desta prova de *trail*, os dados foram recolhidos com o intuito de se saber, entre outras coisas, se cada um deles já tinha participado numa prova deste tipo e se pertencia ao escalão etário Sub23.

Sabe-se que:

- 40% nunca tinham participado numa prova deste tipo;
- 60% já tinham participado numa prova deste tipo;
- 20% dos inscritos pertencem ao escalão etário Sub23;
- 80% dos inscritos pertencem a outro escalão etário.

Admita que, na edição de 2024 desta prova de *trail*, dos inscritos que nunca tinham participado numa prova deste tipo, 35% pertenciam ao escalão etário Sub23.

Seleciona-se, ao acaso, um dos inscritos na edição de 2024 desta prova de *trail*.

Determine a probabilidade de esse inscrito já ter participado numa prova deste tipo e não pertencer ao escalão etário Sub23.

Item obrigatório

7.2. Admita que o peso*, em quilogramas, dos inscritos nesta prova, ao longo dos anos, segue uma distribuição normal, de valor médio 72 quilogramas e desvio padrão σ quilogramas.

Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço.

Escreva na folha de respostas cada um dos números, I, II, III e IV, seguido da opção, a), b) ou c), selecionada. A cada espaço corresponde uma só opção.

Seleciona-se, ao acaso, um dos inscritos nesta prova.
A probabilidade de o seu peso ser superior a 80 quilogramas pode ser ____I____ , e a probabilidade de o seu peso ser superior a 78 quilogramas é igual à probabilidade de o seu peso ser inferior a ____II____ quilogramas. A probabilidade de esse inscrito ter um peso entre $72 - 2\sigma$ e 72 quilogramas é, aproximadamente, ____III____ .
A probabilidade de o seu peso ser inferior a ____IV____ quilogramas é igual a, aproximadamente, $0{,}15865$.

* Na sua aceção corrente, a palavra «peso» é utilizada como sinónimo de massa.

I

a) $0{,}45$

b) $0{,}50$

c) $0{,}55$

II

a) 58

b) 66

c) 68

III

a) $0{,}34135$

b) $0{,}47725$

c) $0{,}49865$

IV

a) $72 - \sigma$

b) $72 - 2\sigma$

c) $72 - 3\sigma$

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 10 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.

1.1. .... 15 pontos

1.2. .... 19 pontos

2. .... 15 pontos

4. .... 19 pontos

5.1. .... 15 pontos

5.3. .... 15 pontos

6.1. .... 15 pontos

6.2. .... 15 pontos

6.3. .... 19 pontos

7.2. .... 15 pontos

SUBTOTAL .... 162 pontos

Destes 4 itens, contribuem para a classificação final da prova os 2 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação. (2 x 19 pontos = 38 pontos)

3., 5.2., 6.4., 7.1.

SUBTOTAL .... 38 pontos

TOTAL.. 200 pontos

Formulário

Modelos de grafos

Condição necessária e suficiente para que um grafo conexo admita circuitos de Euler

Um grafo conexo admite circuitos de Euler se e só se todos os seus vértices forem de grau par.

Modelos de probabilidade

Teorema da probabilidade total e regra de Bayes

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) = P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B) \times P(A \mid B)}{P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})}$$

$$P(A) = P\left(A \cap B_1\right) + P\left(A \cap B_2\right) + P\left(A \cap B_3\right) =$$

$$= P\left(B_1\right) \times P\left(A \mid B_1\right) + P\left(B_2\right) \times P\left(A \mid B_2\right) + P\left(B_3\right) \times P\left(A \mid B_3\right)$$

$$P\left(B_k \mid A\right) = \frac{P\left(A \cap B_k\right)}{P(A)} = \frac{P\left(B_k\right) \times P\left(A \mid B_k\right)}{P\left(B_1\right) \times P\left(A \mid B_1\right) + P\left(B_2\right) \times P\left(A \mid B_2\right) + P\left(B_3\right) \times P\left(A \mid B_3\right)}$$

podendo k tomar os valores $1, 2$ ou 3

Modelo normal

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Intervalos de confiança

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável normal X, admitindo que se conhece o desvio padrão da variável

$$\left]\overline{x} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\overline{x}$ – média amostral

σ – desvio padrão da variável

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável X, admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior a 30

$\left]\overline{x} - z\dfrac{s}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + z\dfrac{s}{\sqrt{n}}\right[$
n – dimensão da amostra $\overline{x}$ – média amostral s – desvio padrão amostral z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para uma proporção p, admitindo que a amostra tem dimensão superior a 30

$\left]p - z\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}},\ \ p + z\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\right[$
n – dimensão da amostra p – proporção amostral z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

(*) Valores de z para os níveis de confiança mais usuais

Nível de confiança	z
90%	1,645
95%	1,960
99%	2,576